Планиметрические нюансы

Войтицкий В.И. Семинар учителей Крыма, 08.09.21

Общие рекомендации (10 правил)

1. Делаем качественный КРУПНЫЙ чертеж линейкой, отмечаем на нём известные и неизвестные элементы. Чертёж должен отображать СЛУЧАЙ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ! Например, если дан общий треугольник, ни в коем случае не рисовать прямоугольный или равнобедренный!
2. Осознаём, являются ли данные в задаче элементы – БАЗИСОМ задачи, т.е. данных не должно быть слишком много (иначе мы работаем с невозможным объектом – НЕТ СУЩЕСТВОВАНИЯ) и не должно быть слишком мало (иначе НЕТ ЕДИНСТВЕННОСТИ). Не забываем, что бывают геометрические задачи с несколькими ответами!
3. Пытаемся решить задачу «от условий». При этом активно используем РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА – находим то, что можем, ищем вспомогательные углы и стороны. Активно используем ТРИГОНОМЕТРИЮ, теорему Пифагора, теорему синусов, косинусов и формулы площади.
4. Пытаемся решить задачу «с конца» (часто применимо в задачах на доказательство). Если верно финальное утверждение, что из этого следует, что можно найти?
5. Если первые попытки не приводят к успеху, меняем подход, рисуем новый чертёж. Не забываем про ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ построения!
6. В задачах на доказательство отмечаем логические шаги (их, как правило, не больше трёх!) и постоянно задаём себе вопрос «почему?», чтоб не пропустить шаг, кажущийся очевидным.
7. Рекомендую использовать СВОЮ (собственноручно сделанную) шпаргалку со всеми формулами. Желательно иметь конспект со всей теорией, например, на основе *книги Р.К. Гордина «Это должен знать каждый матшкольник»* (gordin.pdf (mccme.ru)).
8. Все базовые утверждения обязательно разбирать с доказательствами!
9. Полезно знать координатно-векторный метод, но НЕ использовать его регулярно, а только в случае, когда он «хорошо ложится» в условия задачи!
10. Даже если задача решена своим методом, осваивайте по возможности чужие решения. Теорема Пифагора доказывается десятками способов!

Пример 1. «Хорошие и плохие условия». *Треугольник обычно однозначно определяется тремя элементами (три признака равенства), но только не 3 углами и не любыми тремя сторонами!*

1. Даны три стороны треугольника: 2, 3, 5 см. Найти длину большей медианы.

   Такого треугольника не существует, задача не корректная – не выполнено неравенство треугольника! (если рассматривать ситуацию как предельную, то медиана = 4).

2. Даны две стороны 4 и 3 см и площадь 3 см2. Найти угол между данными сторонами.

$$S = \frac{1}{2} 4 \cdot 3 \cdot sin\,\varphi = 3$$

   $sin\,\varphi = 1/2$. *Отсюда* $\varphi = 30^{\circ}$*, но есть еще одно решение* $\varphi = 150^{\circ}$*. С синусом надо быть аккуратным! Тут два решения!*

3. Даны три угла треугольника $30^{\circ}, 60^{\circ}, 90^{\circ}$ - сумма углов треугольника всегда 180, поэтому это то же самое что даны два угла (признак подобия – по двум углам!) Стороны найти нам не удастся, но зато можно найти отношение большей стороны к меньшей! (надеюсь все понимают, что это число 2 ☺). А если в этой задаче углы $30^{\circ}, 15^{\circ}, 135°$?

   Тогда помогает теорема синусов (не забываем, что против меньшей стороны лежит меньший угол!)

$$\frac{a}{\sin 15} = \frac{b}{\sin 135} \rightarrow$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin 135}{\sin 15} = \frac{\sin 45}{\sin 15} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}/2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

   Тут без хорошего знания тригонометрии совсем НИКАК!

$$\sin 15 = \sqrt{\frac{1-\cos 30}{2}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{3}/2}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

4. Даны две стороны 4 и 3 см и угол 60° найти третью сторону.

   Сразу может показаться, что задача имеет три решения, но на самом деле их два!

   Если угол 60° *между данными сторонами, то задача решается с помощью теоремы косинусов*

$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi = 16 + 9 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 13.$

Получаем ответ $\sqrt{13}$*. Если* угол 60° *напротив стороны 4, то у меня получилась третья сторона* $\frac{\sqrt{13}+3}{16}$ *(помогает формула синус суммы – проверьте в качестве упражнения!). А вот ситуация когда угол* 60° *напротив стороны 3 не может реализоваться! Иначе по теореме синусов получаем синус угла напротив 4 больше единицы!*

Вывод: вот почему имеется лишь признак равенства по двум сторонам и углу между ними, а нет признака по двум сторонам и углу против данной стороны!

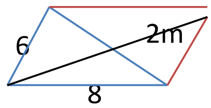
Пример 2. Много нюансов на одной стандартной задаче.

Дан треугольник со сторонами 6, 8, 10. А) Найти радиус вписанной и описанной окружности. Б) Найти медиану, проведенную к большей стороне. В) Найти биссектрису, делящую больший угол пополам.
Г) Найти высоту, проведенную из большего угла.

Три стороны всегда однозначно определяют треугольник, поскольку имеется признак равенства, поэтому задача имеет единственное решение во всех пунктах!
Задачи А и Б (как ни странно) можно решить без привлечения углов и без использования того, что треугольник прямоугольный! А он прямоугольный НЕ по теореме Пифагора, а по теореме ОБРАТНОЙ к теореме Пифагора (а это следствие теоремы косинусов)!!! С использованием углов можете решить задачи в качестве упражнения!

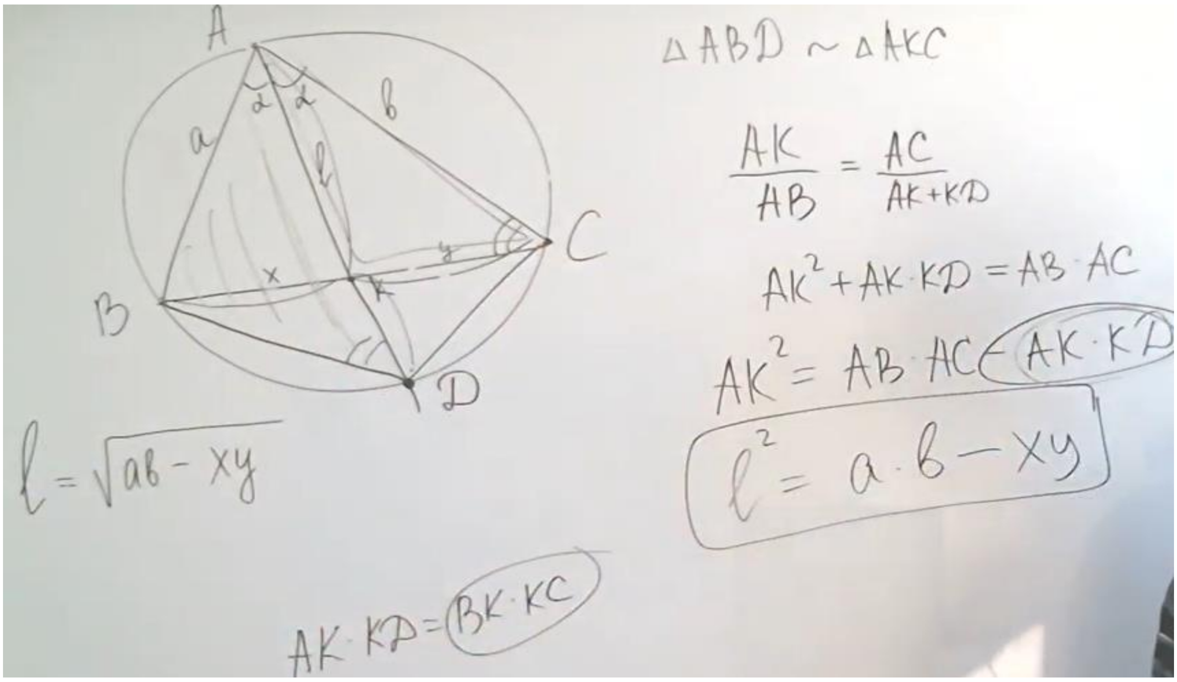
А) Радиус вписанной окружности в общем случае вычисляется с помощью формул площади (их нужно знать 5 штук!)
- формула Герона даёт
$S = \sqrt{12 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} = \sqrt{6 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} = 6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$
- есть формула $S = pr = 12 \cdot r$*, отсюда* $r = 2$.
- еще есть формула $S = \frac{abc}{4R} = \frac{6 \cdot 8 \cdot 10}{4R}$*, отсюда* $\frac{12 \cdot 10}{R} = 24$*, R=5.*

Б) Медиана ищется через дополнительное построение до параллелограмма и использование тождества параллелограмма!

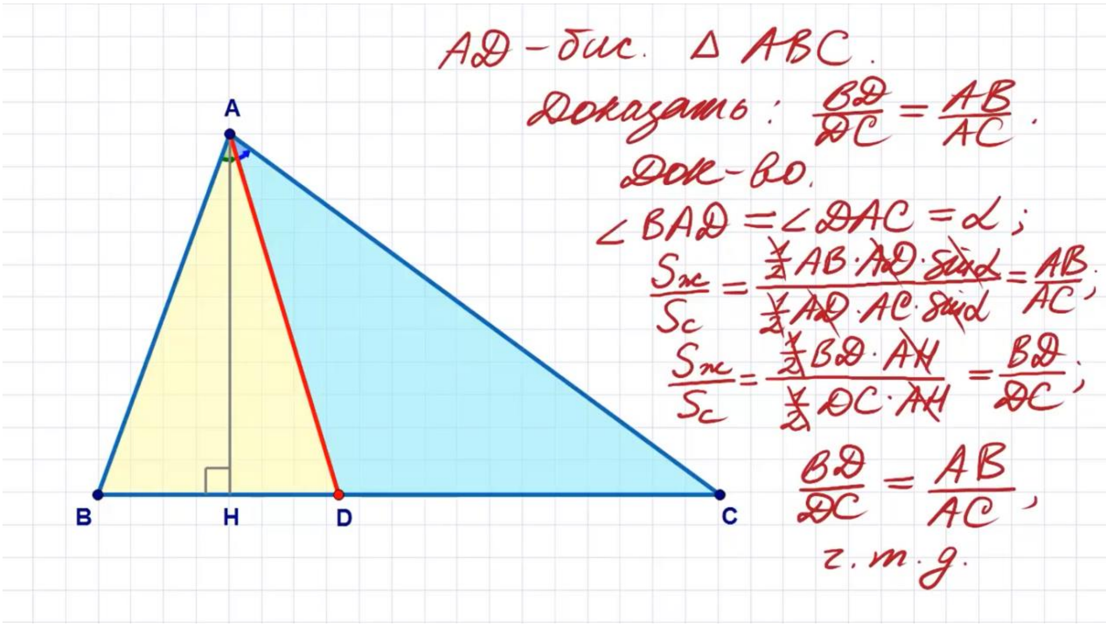


$(2m)^2 + 10^2 = 2(6^2 + 8^2)$*=200,*
Отсюда $4m^2 = 100$*, m=5.*

В) Биссектриса ищется по замечательной формуле $l = \sqrt{ab - xy}$ *(корень из произведения прилежащих сторон минус произведение противолежащих отрезков). Доказательство тоже через дополнительное построение – описанную окружность и четырехугольник, см. ниже!*



Противолежащие отрезки находятся по основному свойству биссектрисы – она делит противоположную сторону на отрезки пропорциональные прилежащим сторонам! Доказательство через площади см. ниже.



В нашей задаче $BD = 6k, DC = 8k$ (k-коэффициент пропорциональности), отсюда
$BC = BD + DC = 6k + 8k = 14k = 10$, $k = 5/7$.

Значит, $l = AD = \sqrt{6 \cdot 8 - 6 \cdot 8 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^2} = \sqrt{48\frac{49-25}{49}} = \frac{24\sqrt{2}}{7}$.

Г) Высота ищется через площадь $S = 24 = \frac{10h}{2} = 5h$, значит h=4,8.

Философское отступление:

Как бы решали задачу физики? Они бы построили с помощью циркуля и линейки реальный треугольник со сторонами 6, 8, 10 см. Потом с помощью этих инструментов нашли центр вписанной и описанной окружности (точки пересечения биссектрис и серединных перпендикуляров – не факт что они это помнят ☺). Из точки пересечения биссектрис опустили бы перпендикуляр на сторону, измерили бы радиус вписанной окружности. С удивлением обнаружили бы, что центр описанной окружности попадает ровно в середину большей стороны, значит R=5. Потом аналогично измерили бы длины медианы биссектрисы и высоты. Имеется минимум 4 причины, почему в геометрии ЗАПРЕЩЕНО так решать задачи!

1) Во-первых, длины могут быть очень большими – даже сторону 100 метров вряд ли построишь. Да и углы точно не построить с помощью транспортира.

2) Во-вторых, конечно результат измерения всегда есть приближенное число, ни о какой точности речи быть не может, никаких ответов с корнями так не получить!

3) По пути решения могут быть какие-то «странные» то ли совпадения, то ли закономерности – пойди это разбери (центр описанной окружности на середине гипотенузы).

4) На самом деле задача в геометрии подразумевает НЕ просто найти ответ в конкретной задаче, а найти АЛГОРИТМ – ФОРМУЛУ, позволяющую по заданным параметрам отыскать неизвестные параметры. Ведь те факты, что были описаны в пунктах А-Г, позволили бы решить задачи с любыми тремя числами, образующими треугольник! Вообще в геометрии чертеж выполняет только вспомогательную роль, не зря ведь есть шутка «*Геометрия - искусство делать правильные выводы по неправильным чертежам» (автор этой фразы, возможно, сам Евклид ☺).*

Обзор книг

1. **Вернуться к старым учебникам Киселева**, ТРИ КЛАССИЧЕСКИХ УЧЕБНИКА КИСЕЛЁВА: АРИФМЕТИКА,.. | ВѢДИ (vk.com)
2. Из новых сборников **обратиться к книгам Гордина**, см. Книги Р. К. Гордин - скачать бесплатно, читать онлайн (avidreaders.ru):
   - Гордин Р.К. Это должен знать каждый матшкольник gordin.pdf (mccme.ru)
   - Гордин Р.К. Геометрия 7-9 gordin.dvi (math.ru)
   - Гордин Р.К. ЕГЭ-2020 задача 16 Задание №16 профильный уровень математика 11 класс ЕГЭ Ященко, Гордин (myotveti.ru)
3. Для сильных классов **использовать книги Шарыгина**, см. Учебники (!) И.Ф.Шарыгина для школьников.. | Физ-мат класс (vk.com)
4. **Использовать задачи-практикумы**
   - Шахмейстер А.Х. Геометрические задачи на экзаменах (и другие книги-их больше 15), Геометрические задачи на экзаменах, Часть 1, Планиметрия, Шахмейстер А.Х., 2015 (obuchalka.org)
   - Потемкина, Потемкин. Геометрия 10-11 классы. Задачник-практикум (учебное пособие, Донецк, 2018).
5. **Просто хорошие книги**
   - Шень А. Геометрия в задачах (2013), Геометрия в задачах. Шень А. 2013... | Я - учитель математики! (vk.com)
   - Полонский, Рабинович, Якир. Учимся решать задачи по геометрии (1996), В.Б. ПОЛОНСКИЙ, Е.М. РАБИНОВИЧ, М.С. ЯКИР... | Math–Досуг (vk.com)

- Останин, Терешин, Королев «Планиметрия в задачах» (МФТИ, 2021) Новый сборник: «Планиметрия в задачах» - Фонд развития Физтех-школ (go2phystech.ru)

Фалы лучших книг от Войтицкого В.В. учителям в облаке - https://yadi.sk/d/kTkOa9IyzDzv6Q