

VII математическая олимпиада имени Леонарда Эйлера Региональный этап. Первый день

- 8.1. На доске написаны четыре числа, ни одно из которых не равно 0. Если каждое из них умножить на сумму трёх остальных, получатся четыре одинаковых результата. Докажите, что квадраты записанных на доске чисел равны. (И. Рубанов)

Решение. Пусть записаны числа a , b , c и d . По условию $a(b + c + d) = b(a + c + d)$, откуда $(a - b)(c + d) = 0$. Аналогично, из равенства $c(a + b + d) = d(a + b + c)$ получаем $(c - d)(a + b) = 0$. Поскольку или $c + d$, или $c - d$ не равно 0, то либо $a = b$, либо $a = -b$. В обоих случаях квадраты чисел a и b равны, откуда в силу произвольности выбора a и b и следует утверждение задачи.

Комментарий. Только конкретный числовой пример — 0 баллов.

Показано, что $a^2 = b^2$, но не пояснено, почему равны все четыре квадрата — 6 баллов.

Получены только одно или несколько равенств вида $(a - b)(c + d) = 0$, дальнейшего содержательного продвижения нет — 1 балл.

Показано, что $a^2 = b^2$ или $c^2 = d^2$, дальнейшего содержательного продвижения нет — 2 балла.

- 8.2. Разрешается вырезать из шахматной доски размером 20×20 любые 18 клеток, а потом выставить на оставшиеся клетки несколько ладей, не бьющих друг друга. Какое наибольшее число ладей можно выставить таким образом? Ладьи бьют друг друга, если они стоят на одной горизонтали или вертикали доски и между ними нет вырезанных клеток.

(О. Дмитриев, Р. Женодаров)

Ответ. 38 ладей.

Решение. Назовём вырезанные клетки *дырками*. Кроме них, добавим к каждой вертикали доски по дырке снизу, а к каждой горизонтали — по дырке справа; всего добавлено $2 \cdot 20 = 40$ дырок.

Пусть на доске расставлено несколько ладей, не бьющих друг друга. Будем временно считать, что ладья бьёт только вправо и вниз. Тогда каждая ладья бьёт по одной дырке справа и снизу от себя (т.е. между ней и этими дычками нет ни других дырок, ни других ладей). С другой стороны, каждую из 18 исходных дырок на доске бьёт не более двух ладей (максимум по одной сверху и слева), а каждую из 40 добавленных дырок — не более одной ладьи. Значит, всего ладей на доске не более $(18 \cdot 2 + 40)/2 = 38$.

Осталось привести пример расстановки 38 ладей, удовлетворяющей требованиям. Для этого вырежем все клетки одной из главных диагоналей доски, кроме двух угловых, и поставим ладьи на все клетки, соседние по сторонам с вырезанными. На рис. 1 показан пример подобной расстановки на доске 6×6 .

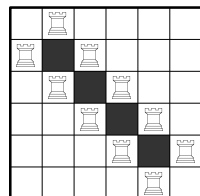


Рис. 1

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Только пример расстановки 38 ладей — 2 балла.

Только доказательство, что ладей не больше 38 — 3 балла.

- 8.3. Делитель натурального числа называется *собственным*, если он меньше этого числа, но больше 1. У натурального числа n нашли все собственные делители (их оказалось не меньше трёх) и записали всевозможные их попарные суммы (повторно одинаковые суммы не записывали). Докажите, что полученный набор чисел не мог оказаться набором всех собственных делителей никакого натурального числа. (А. Храбров)

Решение. Предположим, что полученный набор чисел оказался набором всех собственных делителей некоторого числа m . Поскольку у числа n хотя бы три собственных делителя, среди них найдутся два делителя одной чётности. Тогда их сумма чётна. Число m делится на эту сумму, значит, оно тоже чётно. Следовательно, число 2, являющееся собственным делителем числа m , также было выписано. Но это невозможно, поскольку сумма любых двух собственных делителей числа n больше, чем 2.

Комментарий. Доказано, что число m чётно, дальнейшего содержательного продвижения нет — 3 балла.

- 8.4. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекают стороны CD и DA в точках P и Q соответственно. Оказалось, что $\angle APB = \angle BQC$. Внутри четырёхугольника выбрана точка X такая, что $QX \parallel AB$ и $PX \parallel BC$. Докажите, что прямая BX делит диагональ AC пополам. (С. Берлов)

Решение. Достаточно доказать, что расстояния от точек A и C до прямой BD равны. Это равносильно тому, что $S_{ABX} = S_{BCX}$, поскольку у треугольников ABX и BCX общее основание BX .

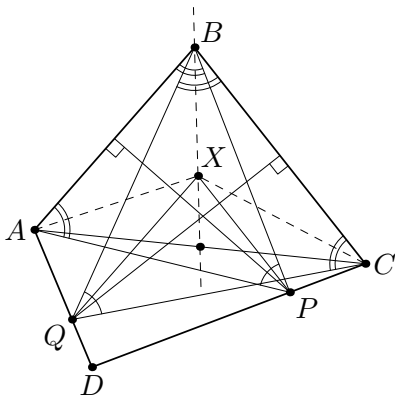


Рис. 2

Поскольку $QX \parallel AB$, имеем $S_{ABX} = S_{ABQ}$. Аналогично, $S_{CBX} = S_{CBP}$. Заметим, что равнобедренные треугольники ABP и CBQ подобны по двум углам, поэтому $AB/BC = BP/BQ$, откуда $AB \cdot BQ = CB \cdot BP$. Так как $\angle ABP = \angle CBQ$, то и $\angle ABQ = \angle CBP$. Следовательно, площади треугольников ABQ и CBP относятся как произведения заключающих равные углы сторон, т. е. эти площади равны. Но тогда $S_{ABX} = S_{ABQ} = S_{CBP} = S_{CBX}$, что и требовалось доказать.