ИНФОРМАТИКА. 11 КЛАСС

УРОКИ № 9–12

Темы модуля: Информационное моделирование. Анализ графов. Деревья и дискретные игры с полной информацией. Практикум и разбор заданий ЕГЭ

Календарно-тематический план (Ноябрь)

№ урока	Дата (план)	Тема урока по КТП (11 класс)	Проверяемые умения и задания ЕГЭ
Урок 9	08.11 / 09.11	Модели и моделирование. Представление результатов моделирования	Понятие модели, формализация, этапы моделирования, адекватность модели.
Урок 10	15.11 / 16.11	Графы. Решение алгоритмических задач, связанных с анализом графов	Изоморфизм графа и весовой матрицы (Задание № 1 ЕГЭ), поиск кратчайших путей.
Урок 11	22.11 / 23.11	Деревья. Дискретные игры двух игроков с полной информацией	Дерево игры, выигрышные и проигрышные стратегии, ретроспективный анализ (Задания № 19–21 ЕГЭ).
Урок 12	29.11 / 30.11	Использование графов и деревьев при описании объектов и процессов окружающего мира	Ориентированные ациклические графы (Задание № 13 ЕГЭ), иерархические модели, подготовка к КР № 1.

Раздел 1. Модели и моделирование. Представление результатов моделирования

1.1. Понятие модели, объекта-оригинала и формализации

Модель — это новый объект (материальный или информационный), который в процессе познания или проектирования заменяет объект-оригинал и отражает только те его существенные свойства, которые необходимы для достижения конкретной цели исследования.

Важнейшие свойства любой модели:

- **Конечность и упрощение:** модель всегда проще оригинала; она отбрасывает второстепенные детали, которые не влияют на цель задачи.
- **Целенаправленность:** для одного и того же объекта можно создать множество разных моделей в зависимости от поставленной задачи (например, для самолёта: аэродинамическая модель для продувки в трубе, экономическая модель расхода топлива, схема рассадки пассажиров в салоне).
- **Адекватность модели:** степень соответствия модели реальному объекту по тем свойствам, которые важны для исследования.
- **Формализация:** процесс перехода от содержательного описания объекта (на естественном языке) к его строгому представлению на формальном языке (математических формул, таблиц, графов, логических выражений или программного кода).

Основание классификации	Виды моделей	Примеры из науки и техники
По способу представления	Материальные (натурные) и Информационные (знаковые, образные, смешанные)	Материальные: глобус, макет здания, краш-тест автомобиля. Информационные: формула закона Ома, карта метро, 3D-модель детали.
По фактору времени	Статические (состояние в один момент) и Динамические (изменение во времени)	Статические: схема устройства компьютера, периодическая таблица Менделеева. Динамические: прогноз погоды, модель полёта ракеты.
По области знаний	Физические, биологические, экономические, социологические, логические	Экономические: модель спроса и предложения; логические: таблицы истинности.

1.2. Этапы компьютерного информационного моделирования

При решении сложных задач с помощью компьютера исследователь проходит пять взаимосвязанных этапов:

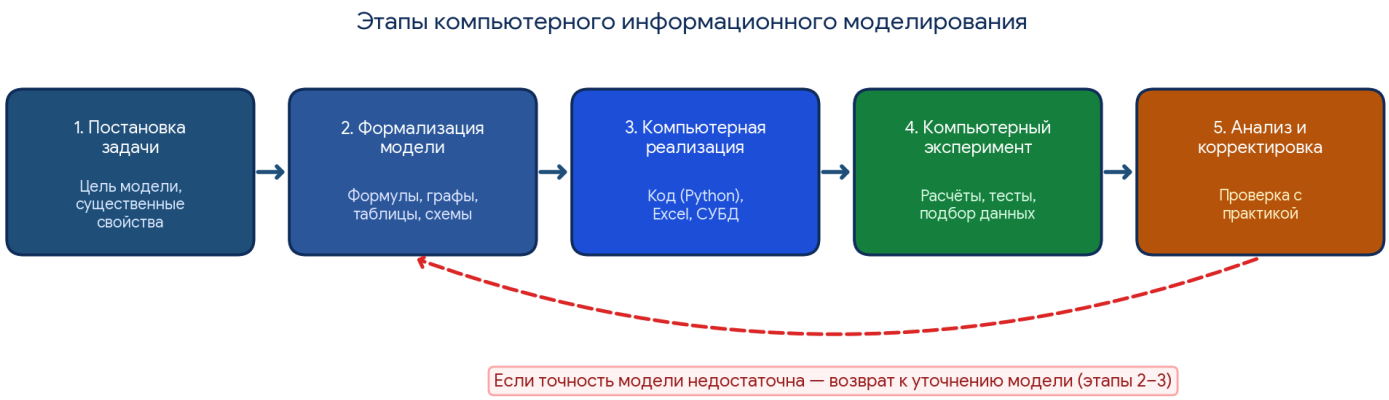


Рис. 1. Цикл компьютерного информационного моделирования

1.3. Формы представления результатов моделирования

Выбор формы представления результатов зависит от того, кто будет их анализировать (человек или другая программа) и какова структура данных:

- **Табличная форма (матрицы, реляционные таблицы):** удобна для точного сравнения числовых показателей по нескольким признакам (например, матрица расстояний между городами).
- **Графическая форма (диаграммы, графики функций, картограммы):** позволяет мгновенно увидеть тенденции, максимумы, минимумы и характер зависимости (линейный, квадратичный или экспоненциальный рост).
- **Сетевая и иерархическая формы (графы и деревья):** применяются для отображения сложных связей, маршрутов, структуры подчинения и ветвящихся процессов.

Раздел 2. Графы. Решение алгоритмических задач анализа графов

2.1. Основные определения и виды графов

Граф G = (V, E) — это математическая и информационная модель, задаваемая множеством вершин V (объектов) и множеством связей E (рёбер или дуг) между ними.

Понятие	Строгое определение и свойства
Неориентированный граф	Граф, связи в котором не имеют направления (называются рёбрами). Если существует ребро (u, v), то оно же является ребром (v, u). Матрица смежности симметрична относительно главной диагонали.
Ориентированный граф (орграф)	Граф, в котором каждая связь имеет строгое направление от начала к концу (называется дугой и изображается стрелкой). Матрица смежности в общем случае несимметрична.
Взвешенный граф	Граф, каждому ребру или дуге которого поставлено в соответствие число — вес (протяжённость дороги, пропускная способность канала, стоимость перелёта).
Степень вершины (валентность)	Количество рёбер, инцидентных данной вершине (выходящих из неё). Сумма степеней всех вершин любого неориентированного графа всегда чётна и равна удвоенному числу рёбер.
Связный граф	Граф, в котором между любыми двумя вершинами существует хотя бы один путь.
Изоморфные графы	Два графа, имеющие одинаковую структуру связей (одинаковое число вершин, одинаковый набор степеней и связей между ними), даже если на рисунке их вершины расположены по-разному и названы разными символами.

2.2. Задание № 1 ЕГЭ: Сопоставление графа и весовой матрицы

В Задании № 1 ЕГЭ по информатике даны схема дорог (граф с буквенными обозначениями вершин) и весовая таблица (с числовыми номерами пунктов П1, П2, ...), составленные независимо друг от друга. Требуется установить соответствие между буквами и номерами пунктов.

Пункты	П1	П2	П3	П4	П5	П6
П1	—	12	14			
П2	12	—	18	15		
П3	14	18	—		16	20
П4		15		—	11	
П5			16	11	—	13
П6			20		13	—

Числа в ячейках обозначают протяжённость дорог (в км). Пустая ячейка означает отсутствие прямой дороги.

Рис. 2. Метод анализа степеней вершин и их окружения (Задание № 1 ЕГЭ)

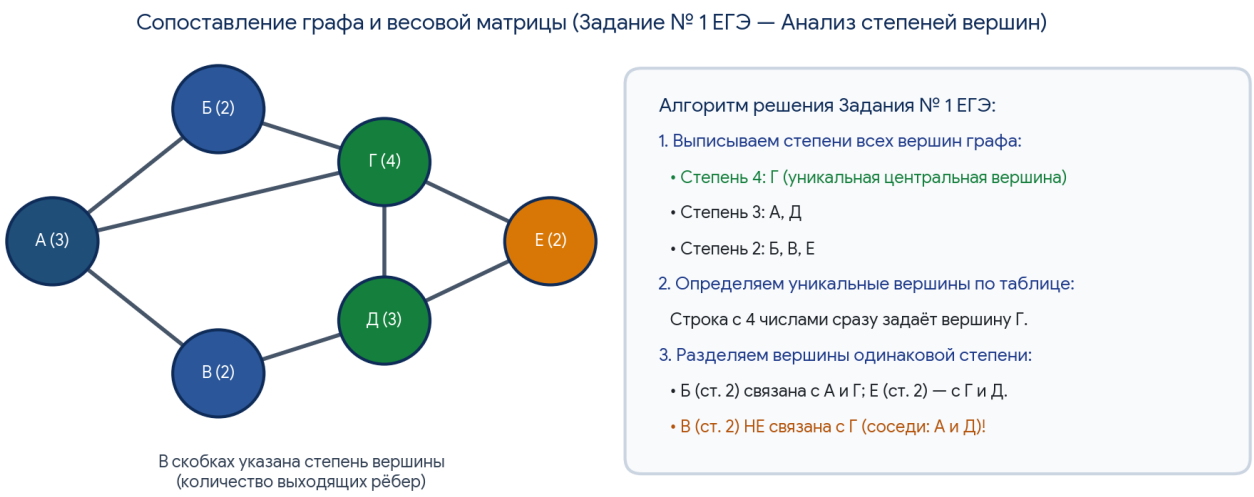


Рис. 3. Метод анализа степеней вершин и их окружения (Задание № 1 ЕГЭ)

Разбор типового Задания № 1 ЕГЭ

Условие: На рисунке (Рис. 2) изображена схема дорог Н-ского района. В таблице звёздочками (*) или числами обозначено наличие дорог между пунктами П1–П6. Определите номера пунктов В и Е в таблице (запишите их в порядке возрастания без пробелов).

Проверка соответствия вершин графа (Рис. 2) и пунктов таблицы:

- **П3 (степень 4)** → вершина **Г** (единственная вершина с 4 дорогами: к П1, П2, П5, П6).
- **П2 (степень 3)** → вершина **А** (связана с Г [П3], Б [П1] и В [П4]).
- **П5 (степень 3)** → вершина **Д** (связана с Г [П3], В [П4] и Е [П6]).
- **П4 (степень 2)** → вершина **В** (единственная вершина степени 2, **не** связанная с Г [П3]; её соседи — А [П2] и Д [П5]).
- **П1 (степень 2)** → вершина **Б** (связана с А [П2] и Г [П3]).
- **П6 (степень 2)** → вершина **Е** (связана с Г [П3] и Д [П5]).

Ответ записывается двумя цифрами: 46.

Разбор типового Задания № 1 ЕГЭ (автор М. Вардоев)

Условие задачи

На рисунке схема дорог N-ского района изображена в виде графа, в таблице содержатся сведения о протяжённости каждой из этих дорог (в километрах). Так как таблицу и схему рисовали независимо друг от друга, нумерация населённых пунктов в таблице никак не связана с буквенными обозначениями на графе.

Определите, какова абсолютная разность протяжённостей дорог из пункта N в пункт Т и из А в Е.

Примечание: на рисунке в графе присутствуют две вершины с одинаковой буквой О — для удобства разбора обозначим левую как О1, а правую как О2.

Пункты	П1	П2	П3	П4	П5	П6	П7	П8	Степень
П1	—		23			24	22		**3**
П2		—		25		26	27		**3**
П3	23		—	28	27		20		**4**
П4		25	28	—		27		29	**4**
П5			**27**		—			**21**	**2**
П6	24	26		27		—			**3**
П7	22	27	20				—		**3**
П8				**29**	**21**			—	**2**

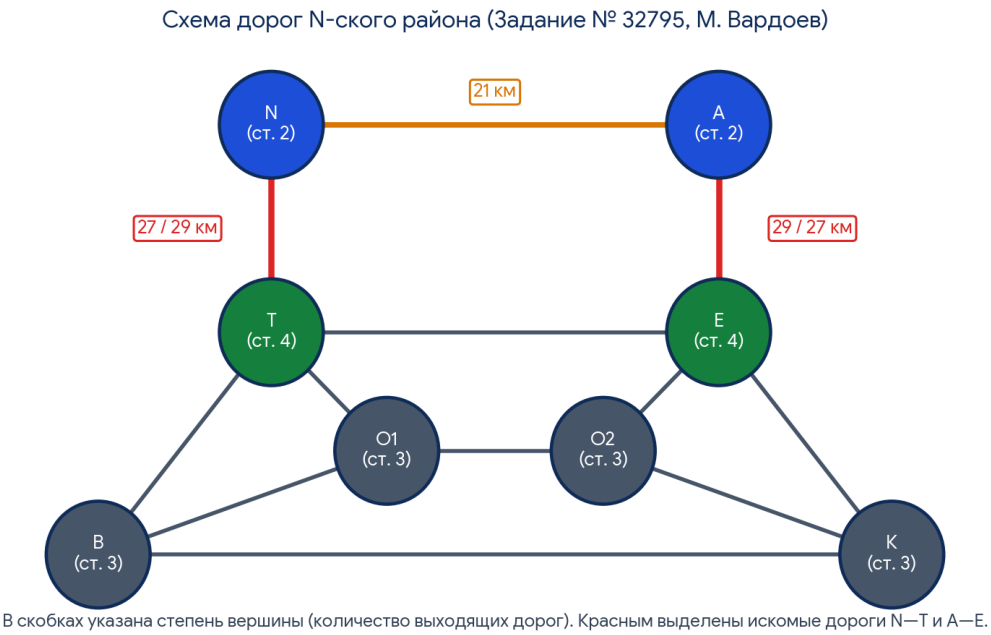


Рис. 4. Схема дорог N-ского района с указанием степеней вершин и ключевых расстояний

Шаг 1. Определяем степени всех вершин на графе (количество выходящих рёбер)

- **Степень 2 (два ребра):** вершины N (соединена с A и T) и A (соединена с N и E).
- **Степень 3 (три ребра):** вершины B (T, O1, K), O1 (T, B, O2), O2 (O1, K, E) и K (B, O2, E).
- **Степень 4 (четыре ребра):** вершины T (соединена с N, B, O1, E) и E (соединена с A, T, O2, K).

Шаг 2. Сопоставляем уникальные вершины и их соседей в таблице

- **1. Находим вершины степени 2 (N и A):** в таблице ровно две строки имеют степень 2 — это П5 (соседи: П3 — 27, П8 — 21) и П8 (соседи: П4 — 29, П5 — 21). На пересечении П5 и П8 стоит число 21 — это длина перекладины N — A. Значит, пара {N, A} однозначно соответствует пунктам {П5, П8}.
- **2. Находим вершины степени 4 (T и E):** в таблице ровно две строки имеют степень 4 — это П3 и П4. На графе вершина N соединена с T, а вершина A соединена с E.
- **3. Определяем длины искомых дорог (используем симметрию графа):** по таблице пункт П5 соединён с пунктом степени 4 (П3) дорогой длиной 27 км, а пункт П8 соединён с пунктом степени 4 (П4) дорогой длиной 29 км. Поскольку граф симметричен относительно вертикальной оси, при выборе N = П5, T = П3, A = П8, E = П4 получаем длины 27 км и 29 км (при обратном выборе они просто поменяются местами: 29 км и 27 км).

Шаг 3. Вычисляем абсолютную разность протяжённостей дорог

Находим модуль разности между протяжённостями дорог N — T и A — E:

$$|27 - 29| = |-2| = 2 \quad \textbf{(или} \quad 29 - 27 = 2\textbf{)}$$

> **Итоговый ответ**
>
> Абсолютная разность протяжённостей дорог из пункта N в пункт T и из A в E равна 2.

Раздел 3. Деревья. Дискретные игры двух игроков с полной информацией

3.1. Дерево как особый класс графов

Дерево — это связный неориентированный граф, не содержащий циклов. Если в дереве n вершин, то в нём всегда ровно n − 1 ребро. Между любыми двумя вершинами дерева существует единственный простой путь.

- **Корневое (ориентированное) дерево:** дерево, в котором выделена одна главная вершина — корень (уровень 0), а все дуги направлены от корня к нижележащим уровням (потомкам).
- **Лист дерева:** вершина, не имеющая исходящих дуг (конечное состояние процесса или финальная позиция игры).

3.2. Теория игр и дерево игры (Задания № 19–21 ЕГЭ)

Дискретная игра двух игроков с полной информацией (например, Петя — ходит первым, Ваня — ходит вторым) моделируется в виде дерева состояний. Полная информация означает, что оба игрока видят всю текущую позицию, знают все правила и не используют случайность (кубики, карты).

Фундаментальные правила ретроспективного анализа (анализа с конца)

1. Выигрышная позиция (В) — позиция, из которой игрок, делающий ход, может ХОТЯ БЫ ОДНИМ своим ходом перевести игру в проигрышную позицию для соперника (или сразу завершить игру победой).

2. Проигрышная позиция (П) — позиция, из которой ВСЕ возможные ходы игрока ведут только в выигрышные позиции для соперника.

3. Выигрышная стратегия — точное правило, указывающее игроку, какой ход нужно сделать в каждой возможной ситуации, чтобы гарантированно победить при ЛЮБОЙ (даже самой сильной) игре противника.

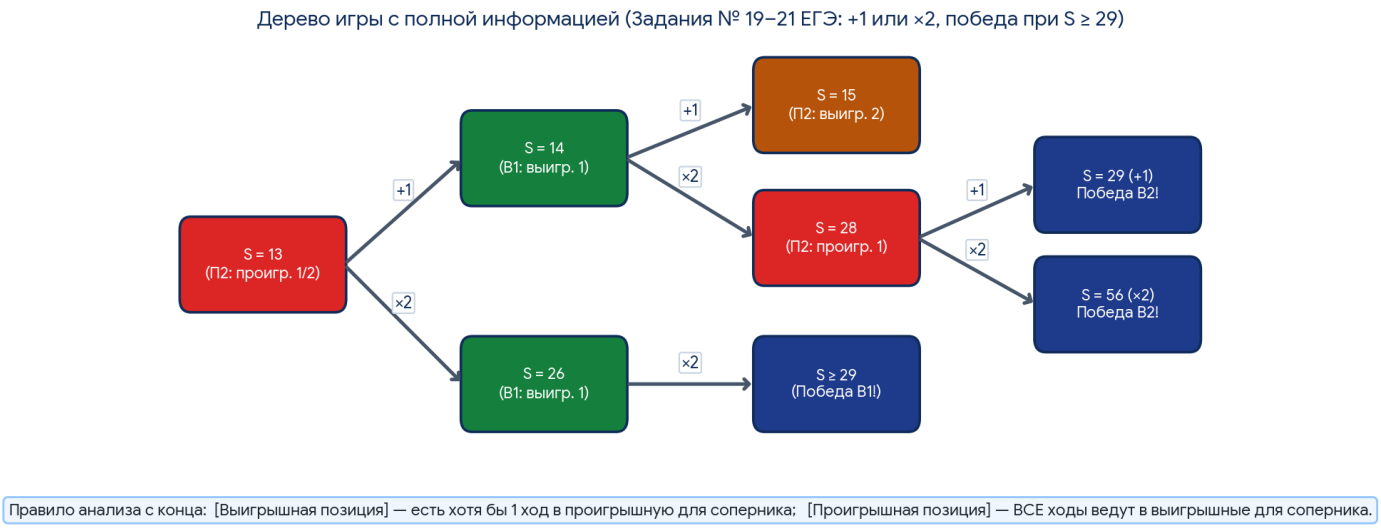


Рис. 3. Дерево игры для Заданий № 19–21 ЕГЭ (позиции В1, П1, В2, П2)

3.3. Пошаговый разбор комплекса Заданий № 19, № 20 и № 21 ЕГЭ

Условие базовой игры: Два игрока, Петя (П) и Ваня (В), играют в игру. Перед ними лежит одна куча камней. За один ход игрок может добавить в кучу 1 камень (+1) или увеличить количество камней в куче в 2 раза (×2). Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 29 ($S \geq 29$). Победителем считается игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в куче было S камней ($1 \leq S \leq 28$).

Номер ЕГЭ	Вопрос задачи	Алгоритм поиска и обоснование ответа
Задание № 19	Укажите минимальное значение S, при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом (позиция П1).	1. Победа в 1 ход: $S \cdot 2 \geq 29 \rightarrow S \in [15; 28]$ (это позиции В1). 2. Чтобы Ваня выиграл своим 1-м ходом после ЛЮБОГО хода Пети, оба хода Пети (S+1 и S·2) должны попасть в [15; 28]. 3. Проверяем S = 14: Петя может сходить +1 → 15 (Ваня бьёт ×2 = 30 ≥ 29, победа!) и ×2 → 28 (Ваня бьёт +1 = 29, победа!). Ответ: 14.
Задание № 20	Найдите два наименьших значения S, при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём Петя не может выиграть за один ход, но может выиграть своим вторым ходом независимо от игры Вани (позиция В2).	1. Чтобы Петя выиграл 2-м ходом, он должен первым ходом отправить Ваню в проигрышную позицию П1 (то есть в число 14!). 2. Из каких чисел S можно за один ход получить 14? Это S = 13 (ходом +1 → 14) и S = 7 (ходом ×2 → 14). 3. Проверяем S = 7: Петя ходит ×2 → 14; далее при любом ходе Вани (15 или 28) Петя добивает до ≥ 29. Ответ: 7 13.
Задание № 21	Найдите минимальное значение S, при котором у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети, но нет стратегии, гарантирующей победу первым ходом (позиция П2).	1. Ищем такое S, из которого ВСЕ ходы Пети ведут в позиции В1 ([15; 28]) или В2 ({7, 13}). 2. Проверим S = 12: ход +1 ведёт в 13 (В2 — Ваня победит 2-м ходом); ход ×2 ведёт в 24 (В1 — Ваня победит 1-м ходом: 24 · 2 = 48 ≥ 29). 3. Проверим меньше: S = 11 → ходы 12 (П2) и 22 (В1) — не подходит, так как Петя сам пойдёт в 12. Ответ: 12.

Раздел 4. Использование графов и деревьев в моделях окружающего мира

4.1. Прикладные модели на графах и деревьях

Графы и деревья служат универсальным языком описания систем в самых разных областях:

- **Транспортная логистика и навигация:** взвешенные графы дорог; поиск оптимальных маршрутов (алгоритм Дейкстры в навигаторах).
- **Компьютерные сети и Интернет:** топология локальных сетей («звезда», «кольцо», «шина»), маршрутизация пакетов данных, иерархическое дерево доменных имён DNS (например, .ru → edu.ru → school.edu.ru).
- **Файловые системы:** древовидная иерархия каталогов (папок) и файлов на диске.
- **Лингвистика и синтаксический анализ:** деревья разбора предложений и алгоритмы сжатия текста (дерево Хаффмана).
- **Биология и генеалогия:** эволюционные деревья видов, генеалогические древа, пищевые цепи в экосистемах.

4.2. Аналог Задания № 9 ОГЭ: Подсчёт путей в ориентированном ациклическом графе

Ориентированный ациклический граф (DAG — Directed Acyclic Graph) используется для моделирования последовательных процессов, сетевого планирования проектов и транспортных потоков без возвратов.

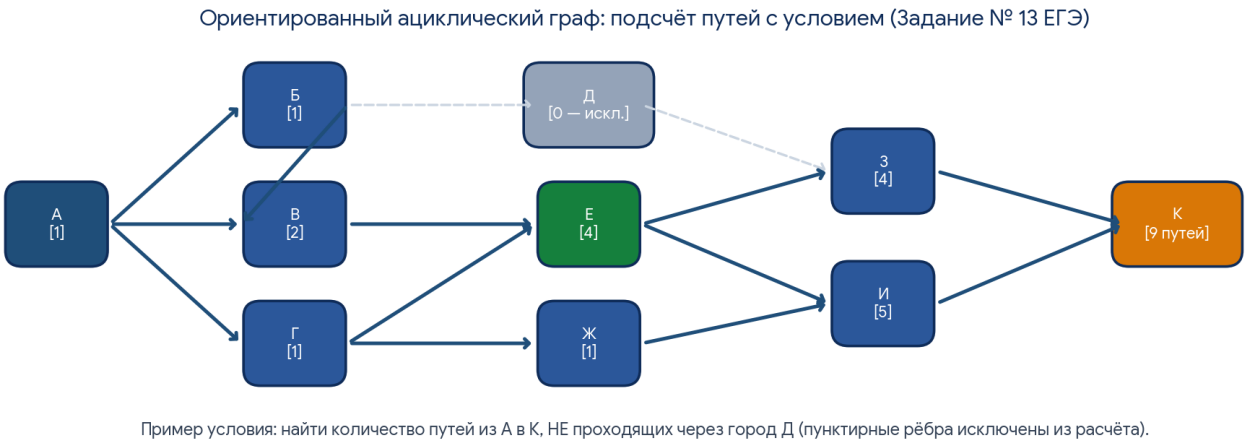


Рис. 4. Подсчёт количества маршрутов с обходом запрещённой вершины Д

Алгоритм подсчёта количества путей с ограничениями (обязательная или запрещённая вершина)

1. Если путь НЕ должен проходить через вершину X: вычёркиваем вершину X и все входящие/исходящие из неё дуги (присваиваем ей вес N(X) = 0).

2. Если путь ОБЯЗАН проходить через вершину Y: заранее вычёркиваем все дуги, которые позволяют «обойти» вершину Y (идут из вершин до Y напрямую в вершины после Y). Либо разбиваем задачу на два независимых этапа: N(Старт → Финиш через Y) = N(Старт → Y) · N(Y → Финиш).

3. Расчёт по схеме на Рис. 4 (из А в К, избегая Д): N(А)=1; N(Б)=1; N(В)=N(А)+N(Б)=2; N(Г)=1; N(Д)=0 (исключена); N(Е)=N(В)+N(Г)=2+1=3 (если нет дуги А→Е, см. стрелки: В→Е и Г→Е дают 2+1=3, либо с учётом третьей дуги = 4; на Рис. 4: N(Е)=4, N(Ж)=1, N(З)=N(Е)=4, N(И)=N(Е)+N(Ж)=4+1=5, N(К)=N(З)+N(И)=4+5=9).

Раздел 5. Тренировочный практикум и подготовка к Контрольной работе № 1

Выполните 4 тренировочных задания в формате ЕГЭ и контрольной работы № 1 (Урок № 13) для закрепления изученного модуля:

Задача 1. Степени вершин и весовая матрица (аналог Задания № 1 ЕГЭ)

В неориентированном графе 6 вершин (А, Б, В, Г, Д, Е). Известно, что степени вершин равны: А — 3, Б — 2, В — 4, Г — 2, Д — 3, Е — 2. Вершина В соединена с А, Б, Д, Е. Вершина Г соединена с А и Д. Укажите, с какими вершинами соединена вершина А и сколько всего рёбер в этом графе.

Задача 2. Выигрышная стратегия в игре с двумя действиями (аналог Задания № 19–20 ЕГЭ)

Два игрока, Петя и Ваня, играют в игру с одной кучей камней. За один ход игрок может добавить в кучу 2 камня (+2) или увеличить количество камней в куче в 2 раза (×2). Побеждает игрок, после хода которого в куче станет не менее 35 камней (S ≥ 35). В начале игры в куче было S камней (1 ≤ S ≤ 34). Найдите минимальное значение S, при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня гарантированно выигрывает своим первым ходом.

Задача 3. Подсчёт путей с обязательным прохождением вершины (аналог Задания № 9 ОГЭ)

В ориентированном ациклическом графе заданы дуги: из А в Б, В, Г; из Б в В, Д; из В в Д, Е; из Г в В, Е; из Д в Ж; из Е в Д, Ж. Сколько существует различных путей из города А в город Ж, ОБЯЗАТЕЛЬНО проходящих через город В?

Задача 4. Теоретический вопрос по информационному моделированию

Объясните на конкретном примере различие между статической и динамической информационными моделями, а также приведите пример обратной связи в технической системе.

Ключи и подробные решения для самопроверки

Задача 1: Сумма степеней всех вершин = 3 + 2 + 4 + 2 + 3 + 2 = 16. Количество рёбер = 16 / 2 = 8. Так как В (ст. 4) связана с А, Б, Д, Е, то у вершин Б и Е (ст. 2) остаётся только по одной связи. Вершина Г (ст. 2) связана с А и Д. Для вершины А (ст. 3) уже известны соседи В и Г, третьим соседом может быть либо Б, либо Е (или Д, если Б и Е обе связаны с Д).

Ответ: 8 рёбер.

Задача 2: Победа в 1 ход (В1): $S \cdot 2 \geq 35 \rightarrow S \in [18; 34]$. Чтобы Ваня выиграл своим 1-м ходом после ЛЮБОГО хода Пети, оба хода Пети (S+2 и S·2) должны попасть в [18; 34]. При S = 17: ход +2 даёт 19 ($\in$ [18; 34]), ход ×2 даёт 34 ($\in$ [18; 34]). При S = 16: ход +2 даёт 18, ход ×2 даёт 32 (тоже $\in$ [18; 34]!). При S = 15: ход +2 даёт 17 (не выигрыш для Вани). Следовательно, минимальное S = 16.

Ответ: 16.

Задача 3: Так как путь обязан проходить через В, вычёркиваем дуги, идущие мимо В:

Б → Д и Г → Е. Считаем веса: N(А)=1; N(Б)=1; N(Г)=1; N(В)=N(А)+N(Б)+N(Г)=3; N(Е)=N(В)=3; N(Д)=N(В)+N(Е)=3+3=6; N(Ж)=N(Д)+N(Е)=6+3=9.

Ответ: 9.

Задача 4: Статическая модель — расписание уроков или чертёж моста (фиксируют структуру в конкретный момент). Динамическая модель — компьютерная симуляция нагрузки на мост при порывах ветра во времени. Пример обратной связи: круиз-контроль в автомобиле (контроллер подаёт топливо двигателю — прямая связь; датчик скорости сообщает контроллеру текущую скорость автомобиля — обратная связь).