

Урок № 24. Тема урока: «ЧТО ТАКОЕ ФУНКЦИЯ?»

Урок освоения новых знаний.

Тема учебника «п.12. Что такое функция». п. 12 (с. 54—56) учебника.

Цели: ввести понятие функциональной зависимости; дать определения независимой переменной (аргумента), зависимой переменной, области определения функции, области значений функции.

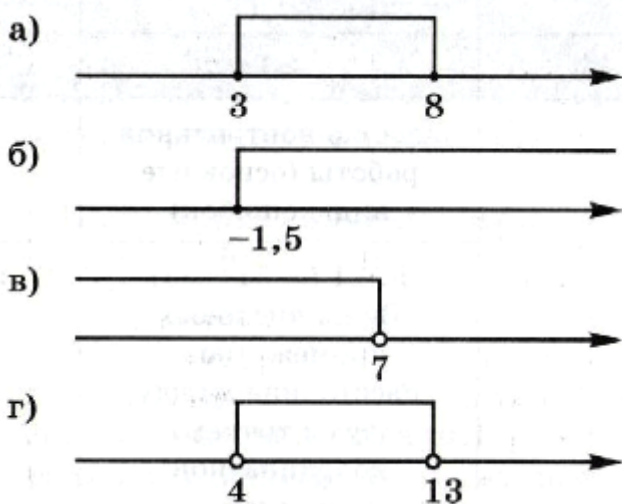
12. Что такое функция

Понятия:

- функции;
- независимой переменной;
- зависимой переменной;
- области определения функции.

Устное упражнение.

№1. Назовите числовой промежуток.



№ 2. Найдите расстояние между двумя точками координатной прямой, заданными своими координатами:

а) $A(12,1)$ и $B(15)$; б) $A(-0,5)$ и $B(7,5)$; в) $A(-4,6)$ и $B(-7,2)$.

№3. Найдите значение выражения.

а) $3x - (2 + 3x)$, при $x = 7,862$; б) $2a - (a - 0,3)$, при $a = 0,7$;

Правила и закономерности.

Решим занимательные задачи.

Задача 1. Фокусник Фукс утраивает количество фиников на блюде, на секунду накрыв его шляпой. Фантазёру Феде достаточно закрыть глаза, чтобы мысленно увеличить число фиников у себя в кармане ровно на 13 штук.

а) Фукс накрыл блюдце один раз и теперь там 27 фиников. Сколько фиников было?

б) На блюдце 5 фиников, в кармане у Феи — тоже 5 фиников. Кто сильнее увеличит число своих фиников за одну операцию: Фукс или Фея?

в) Блюдце накрыто шляпой, и мы не знаем, сколько фиников накрыли. Сколько фиников может оказаться на блюдце, когда Фукс уберёт шляпу? Опишите все варианты.

г) Фея жалуется, что закрыл глаза и видит всего 10 фиников. Докажите, что что-то и правда пошло не так.

Задача 2.

а) Фокусник Фукс принёс новую шляпу и показывает фокусы. Известно, что 5 фиников он превратил в 15, 8 фиников — в 28, $3 \rightarrow 13$, $7 \rightarrow 17$, $14 \rightarrow 34$. Придумайте правило, по которому могла бы действовать новая шляпа Фукса. Во что она, следуя вашему правилу, превратит 99 фиников? А 888 фиников?

б) Фея тоже обновил правило: если в кармане 5 фиников, он представляет 26 фиников; если 2 финика, представляет 5; если 10 — 101; $7 \rightarrow 50$. Придумайте подходящее правило и найдите, во что по этому правилу превращаются 6 фиников; 20 фиников; 15 фиников.

Задача 3. Придумайте подходящее правило и заполните пустые клетки

а)

кот	ёж	паук	аист	черепаха	медведь	шмель	сыроежка
3	2	4	4	8			

б)

кот	ёж	паук	аист	черепаха	медведь	шмель	сыроежка
4	4	8	2	4			

в)

кот	ёж	паук	аист	черепаха	медведь	шмель	сыроежка
1	1	2	2	4			

г)

кот	ёж	паук	аист	черепаха	медведь	шмель	сыроежка
0	0	0	1	0			

Задача 4. Придумайте подходящее правило и заполните пустые клетки

а)

91	365	618	630	853	111	12345678910	888555
10	14	15	9				

б)

91	365	618	630	853	111	12345678910	888555
1	1	0	0	1			

в)

91	365	618	630	853	111	12345678910	888555
−59	215		480				888405

г)

91	365	618	630	853	111	12345678910	888555
9	90	48	0				



д)

91	368	618	630	853	111	12345678910	888555
1	3	3	2	2	0		

Задача 5.

Из камешков сложили уголки, см. рис. ниже.

- а) Сколько камешков в третьем уголке? В шестом уголке? В уголке № n ?
б) Сколько камешков в первых двух уголках? В первых пяти уголках?
в) Сколько камешков в первых 100 уголках? Не забудьте обосновать ваш ответ! 1), 2), 3), 4), и т.д.

Задача 6.

а) Розенкранц кидает монетку. Первые 92 раза выпал орёл. Что выпадет в 93-й раз, если сохранится та же (какая именно?) закономерность?

б) Розенкранц кинул монетку 920 раз. Первые 92 раза выпадал орёл, потом 92 раза решка, потом 92 раза орёл, и так далее. Что выпало на 920-й раз? Что выпадет на 2019-й раз, если закономерность сохранится?

в) Придумайте «закономерность», для которой первые 920 бросков дают тот же результат, что и в пункте (б), а 2019-й бросок даёт другой результат.

Задача 7. Назовём *чёрным ящиком* устройство, превращающее одни объекты в другие.

а) Чёрный ящик №1 превращает обыкновенную дробь в целое число. Известно, что дробь $\frac{2}{3}$ он превратил в 1, дробь $\frac{8}{7}$ — тоже в 1, $(-\frac{42}{91})$ — в 7, $\frac{36}{8} \rightarrow 4$, $(-\frac{91}{143}) \rightarrow 13$. Придумайте подходящее правило и ответьте, во что чёрный ящик №1 превратит: $\frac{3}{5}$, $-\frac{3}{51}$, $\frac{100}{225}$, $\frac{123}{111}$, $\frac{144}{60}$.

б) Чёрный ящик №2 действует по другому правилу. Изучите и дозаполните таблицу.

число, опущенное в чёрный ящик	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{7}$	$-\frac{91}{42}$	$\frac{36}{8}$	$\frac{91}{10}$	$\frac{100}{225}$	$\frac{123}{111}$	$-\frac{3}{51}$	$\frac{144}{60}$	$\frac{1000}{3}$
число, возвращённое чёрным ящиком	0	1	-3	4	9					

в) Чёрный ящик №3 обрабатывает любые числа. Изучите и дозаполните таблицу.

ВХОД	16	$\frac{8}{7}$	$-\frac{91}{42}$	-5,7	$-\frac{91}{143}$	0	29	$-\frac{3}{51}$	$\frac{144}{60}$	-7
ВЫХОД	16	$\frac{8}{7}$	$\frac{91}{42}$	5,7	$\frac{91}{143}$	0				

Задача 8. Придумайте свои «чёрные ящики» вроде описанных в задаче 7.

Вы сами выбираете, что принимает и что возвращает ваш чёрный ящик.

Что такое функция?

В задаче 6б) по номеру броска n всегда можно точно сказать, что выпадет: правило чёткого соответствия.

Это и есть функция: каждому «входу» (номеру броска) соответствует ровно один «выход» (орёл или решка).

В задаче 6а) исхода предсказать нельзя — это не функция, а случайность.

В задаче 6в) правило меняют для больших n — это тоже функция, но с другим правилом на новом участке.

Формально: функция — это правило, по которому каждому числу из одного набора (аргумент) ставят в соответствие ровно одно число (или объект) из другого набора (значение).

Функция — это правило, которое каждому числу-входу даёт ровно одно число-выход. Например, в задаче 6б) номер броска — вход, а «орёл» или «решка» — выход, и для каждого номера он только один.

Представь себе, что у тебя есть волшебный автоматический аппарат, который превращает одно число в другое по определённому правилу. Например, он может умножить любое введённое тобой число на два или прибавить к нему три. Именно такую связь чисел называют **функцией**.

Вот другой простой пример функции:

Если мы возьмём число 5 и применим правило "умножить на 2", то получим результат – 10. То же самое будет происходить со всеми другими числами, например, 6 превратится в 12, а 8 станет 16.

Другими словами, **функция** – это когда каждому числу соответствует ровно одно новое значение через какое-то правило преобразования.

Зачем изучать функции?

Изучение функций помогает понять, как связаны разные величины друг с другом. Это очень полезно в жизни и науке. Вот несколько примеров применения функций:

1. *Физическая наука:* Зависимость расстояния от времени движения поезда ($S=v \cdot t$, где скорость постоянная). Чем больше время пути, тем дальше поезд проехал.

2. *Экономика:* Цена товара зависит от количества купленных единиц (например, скидка за оптовые покупки).

3. *Повседневная жизнь:* Время суток влияет на температуру воздуха (чем ближе к обеду, тем теплее становится).

Самое важное для понимания и запоминания:

Функция устанавливает однозначное соответствие между двумя величинами.

Каждая функция имеет своё уникальное правило преобразования числа.

Важно уметь определять область определения функции (какие значения могут принимать аргументы) и область значений (что получается в результате).

Простейшие виды функций (линейные, квадратичные) встречаются повсеместно и их нужно научиться распознавать и применять.

Основные способы задания функции — аналитический (формула), табличный (таблица значений), графический (график), словесный (описание словами).

Аналитический: функция задаётся формулой, по которой вычисляют значение y для любого x .

Аналитический способ задания функции подразумевает запись математической формулы или уравнения, которое чётко определяет, каким образом вычисляется значение функции для любого аргумента. Такая формула

позволяет точно рассчитать значение функции для любой точки области её определения.

Пример из реальной жизни: Оплата мобильной связи.

Предположим, вы пользуетесь тарифом мобильного оператора, стоимость которого рассчитывается следующим образом:

- Абонентская плата составляет 300 рублей ежемесячно.
- За каждую минуту разговора дополнительно начисляют 1 рубль.

Пусть x — количество минут разговоров в месяц, тогда общая сумма оплаты за этот период определяется формулой: $y=300+x$,

где:

- y — итоговая сумма платежа в рублях,
- x — количество использованных минут разговоров.

Эта формула является примером аналитического задания функции, поскольку позволяет сразу посчитать сумму платежа за любую продолжительность звонков.

Таким образом, аналитический способ наиболее точен и удобен для расчетов и анализа зависимостей между величинами.

Табличный способ задания функции: значения x и соответствующие y записывают в таблицу.

Когда функцию задают с помощью таблицы, каждая строчка содержит пару чисел: первое число показывает исходное значение (аргумент), второе — результат действия функции (значение функции). Другими словами, таблица наглядно демонстрирует зависимость одного показателя от другого.

Пример.

Значение x	1	2	3
Значение y	5	7	9

Пример из повседневной жизни: Рост ребёнка.

Рассмотрим рост мальчика Серёжи с рождения до 9 лет. Представьте таблицу, которая связывает возраст ребёнка и его средний рост:

Возраст (лет)	Средний рост (см)
0	50
1	75
2	85
3	95
4	105
5	115
6	125
7	135
8	145

Здесь видно, что каждому возрасту однозначно соответствует свой рост. Так таблица позволяет увидеть закономерности роста ребенка по годам. Эта

простая форма представления информации широко используется в медицине, статистике и даже быту.

Графический способ задания функции: функция представлена графиком на координатной плоскости — по нему определяют y для заданного x .

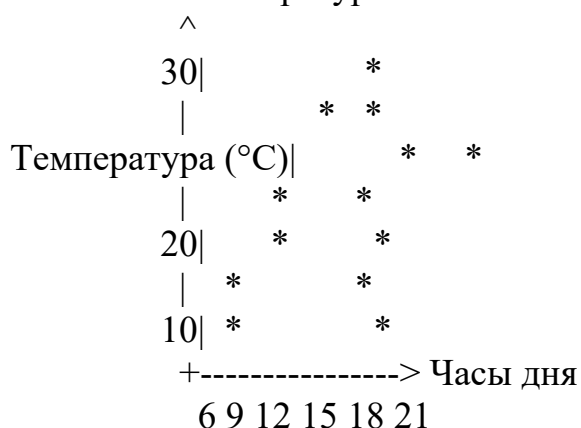
Что означает графическое представление функции?

Графический способ задания функции заключается в изображении графика на координатной плоскости. На оси абсцисс (горизонтальной линии) откладывают аргумент (входящее значение), а на оси ординат (вертикальной линии) — соответствующее ему значение функции (результат).

Пример из реальной жизни: Изменение температуры воздуха в течение дня.

Допустим, мы хотим проследить, как меняется температура воздуха на улице в течение суток. Для этого можно построить график, где ось X представляет часы дня, а ось Y — температуру в градусах Цельсия.

Например, вот такой график поможет нам визуальным образом представить изменения температуры в течение конкретного дня:



На графике видно, что утром было прохладнее, днём воздух прогрелся сильнее всего, а вечером снова похолодало. Такой визуальный подход делает информацию понятной и легко воспринимаемой.

Таким образом, графики помогают наглядно показать взаимосвязь переменных величин и лучше понимать характер изменений одной величины относительно другой.

Чем хорош графический способ? Он очень наглядный: по графику сразу видно, возрастает функция или убывает, где у неё «пик» или «провал». Правда, если нужно точно вычислить значение для какого-то сложного x , удобнее использовать формулу (аналитический способ).

Словесный способ задания функции: правило описывают словами.

Пример: «каждому числу x соответствует число, которое на 3 больше».

1. «Каждому числу соответствует число, которое на 5 больше». Это значит: если взяли 2 — получили 7; взяли 10 — получили 15 и т. д. По сути, это функция $y=x+5$, но задана она словами.

2. «Каждому натуральному числу ставим в соответствие его квадрат». То есть: $1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 9, 4 \rightarrow 16 \dots$ В виде формулы это $y=x^2$, а словами — как раз такое описание.

3. «Стоимость поездки на такси равна 100 рублей плюс 20 рублей за каждый километр». Здесь аргумент — количество километров (x), а значение функции — стоимость (y). Правило словами: «к 100 прибавляем 20, умноженное на число километров». Формула: $y = 100 + 20x$.

4. «У Пети всегда на 3 конфеты больше, чем у Маши». Если у Маши x конфет, то у Пети $x + 3$. Зависимость задана через жизненную ситуацию — это и есть словесное описание функции.

5. «Остаток от деления числа на 3». Например: для 1 остаток 1, для 2 — 2, для 3 — 0, для 4 — 1 и так далее. Тут нет простой формулы, но правило словами чётко задаёт функцию: каждому числу сопоставляем остаток при делении на 3.

Словесное описание помогает сначала понять смысл зависимости и только потом переходить к формулам. Особенно это важно в задачах, где сначала нужно разобраться, что от чего зависит (например, в задачах про стоимость, расстояние, время, количество предметов).

Задание функции формулой: правило прописывают формулой.

Иногда функцию можно задать формулой. Например, число стульев из примера 1 можно рассчитать по формуле: число стульев равно число гостей + число хозяев.

Допустим, что хозяев трое, тогда единственная неопределённость — это число гостей. Обозначим его через x .

Получим формулу: (число стульев в случае, если придёт x гостей) равно $x + 3$.

В частности, (число стульев в случае, если придёт 8 гостей) равно $8 + 3 = 11$ (число стульев в случае, если придёт 0 гостей) равно $0 + 3 = 3$.

Писать «число стульев в случае, если придёт ...гостей» — длинно.

Поэтому часто вводят короткое название для функции.

Например, можно назвать наше количество стульев буквой C и вместо «число стульев в случае, если придёт x гостей» писать $C(x)$.

Тогда получится формула $C(x) = x + 3$.

Стоит запомнить следующее стандартное обозначение.

Обозначение. $f(x)$ («эф от икс») — это значение функции f для аргумента x .

Функции: термины и обозначения. Функция: зависимость значения от аргумента.

Функция — это правило, по которому каждому значению одной величины (аргумента, обычно обозначают как x) ставится в соответствие ровно одно значение другой величины (функции, обычно y).

Простыми словами: есть входное число — по какому-то правилу из него получают выходное, и для одного входа всегда будет только один выход.

Примеры:

• периметр квадрата: $P = 4a$ — сторона a задаёт единственный периметр P ;

- стоимость покупки: $C=120 \cdot n$ — количество товаров n однозначно определяет общую стоимость C при цене 120 руб. за штуку.

Записывают чаще как $y=f(x)$: « y зависит от x по правилу f ».

Определение 1. Функцией в математике называют зависимость одной величины от другой величины (называемой аргументом функции), при которой каждому значению аргумента соответствует ровно одно значение функции.

«Чёрные ящики», шляпы Фукса и прочие «правила» — это примеры функций.

Приведём примеры, описывая аргумент и значение функции.

Число стульев, которое нужно хозяевам поставить вокруг стола, зависит от числа гостей. Число гостей — аргумент функции, число стульев — значение функции. Оценка за тест зависит от числа правильных ответов.

Число верных ответов — аргумент функции, оценка — значение функции.

- Число клеток в клетчатом квадрате зависит от длины стороны квадрата. Это функция, которую можно назвать «площадь клетчатого квадрата». Аргумент функции — длина стороны — может быть любым натуральным числом. Площадь данного квадрата — это значение функции.

Вопрос 1. Что было аргументами и значениями функций из № 1 и 2 про Федю и Фукса?

Вопрос 2. Что было аргументами и значениями функций, описанных в задачах 3 и 4?

Вопрос 3. Может ли функция из задачи 7(а) принимать значение 17? а значение 1 2?

Независимая переменная — это аргумент (x).

Зависимая переменная — это функция от аргумента ($y=f(x)$).

Значения зависимой переменной — это значения функции.

Область определения — все допустимые значения аргумента ($D(f)$).

Пример 1: площадь квадрата $S=a^2$, $a>0 \rightarrow D(f)=\{a>0\}$.

Пример 2: время от 0 до 24 ч $\rightarrow D(f)=[0;24]$.

Аргумент — независимая переменная; функция — зависимая переменная от аргумента; значения функции — результаты при подстановке аргумента; область определения — множество всех допустимых значений аргумента.

Выполните тренировочные упражнения №№ 258, 260, 261, 263.

Область определения и множество значений функции

Определение. Допустимыми значениями аргумента функции называются те значения аргумента, для которых значение функции определено.

Определение. Областью определения функции называется множество всех допустимых значений аргумента. Обозначение: $D(f)$, где f — название данной функции.

Определение. Множество значений функции — это множество всех значений, которые эта функция принимает. Обозначение: $E(f)$, где f — название данной функции.

Пример 3. Приведём примеры допустимых и недопустимых значений функций. Для функции $N_{\text{сторон}}$ «количество сторон многоугольника» допустимые значения аргумента — многоугольники.

Например, для аргумента « Δ » значение функции равно 3, а для аргумента «15» значение функции не определено, так как 15 — число, а не многоугольник.

Область определения $D(N_{\text{сторон}}) = \text{«множество всех многоугольников»}$. Множество значений $E(N_{\text{сторон}}) = \text{«все натуральные числа, большие 2»}$. Для функции f «1, если данное целое число нечётно, и 0, если чётно» допустимые значения аргумента — целые числа.

Для аргумента (-125) значение функции равно 1, а для аргумента 2,5 значение не определено, так как 2,5 не является целым числом.

Область определения $D(f) = \text{«множество всех целых чисел»}$.

Множество значений $E(f) = \text{«числа 1 и 0»}$.

Для функции $N_{\text{букв}} = \text{«число букв в слове»}$ допустимые значения аргумента — слова.

Бесполезно спрашивать, каково значение этой функции для аргумента « Δ », так как это фигура или значок, но не слово.

Итак, $D(N_{\text{букв}}) = \text{«множество всех слов»}$.

Следующие три вопроса относятся к примеру 3.

Вопрос 4. Чему равно значение функции $N_{\text{сторон}}$ для аргумента «квадрат»? А для аргумента «монета»? Входит ли число 6 в область определения этой функции? Входит ли число 6 в множество значений? Входит ли число 2 в множество значений?

Вопрос 5. Чему равно значение функции f из примера 2 для аргумента 0? А для аргумента -23 ? Входит ли число 1,2 в область определения функции f ? Входит ли число 12 в множество значений?

Вопрос 6. Как вы думаете, почему в примере 2 в последнем пункте авторы не указали множество значений $E(N_{\text{букв}})$? Что входит в это множество значений? Можете ли вы точно его описать?

Задача 9. Найти области определения и множества значений функций в задаче 1 и 2.

Задача 10. Найдите области определения и множества значений функций в задаче 3.

Задача 11. Придумайте функцию с данными свойствами:

а) область определения: все люди, значения: целые числа (необязательно все, если бы мы имели в виду «все», то написали бы: «множество значений = все целые числа»);

б) область определения: все существительные русского языка, множество значений: все буквы русского алфавита, кроме «ъ», «ы», «ь»;

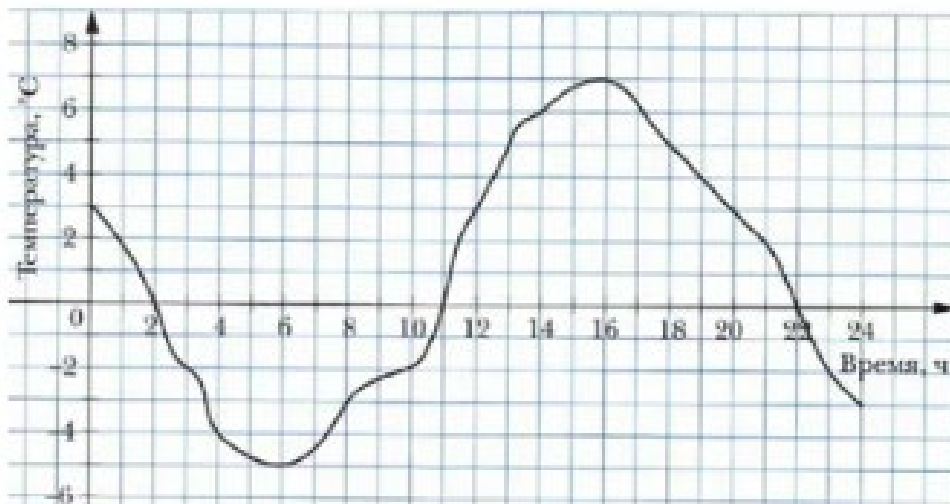
в) область определения: все многоугольники, значения: натуральные числа;

г) $D(f)$ = «все многоугольники», $E(f)$ = «все положительные числа»;

д) $D(f)$ = «обыкновенные дроби», $E(f)$ = «все целые числа»;

е) $D(f)$ = «обыкновенные дроби», $E(f)$ = «все натуральные числа, причём каждое своё значение функция принимает только 1 раз».

Рассмотрим несколько примеров.



Дано:
график
зависимости
температуры
воздуха p (в $^{\circ}\text{C}$)
от
времени t (в ч),
 $0 \leq t \leq 24$.

Чертёж:
координатная
плоскость; ось

абсцисс — время t (ч), шаг сетки — 2 ч; ось ординат — температура p ($^{\circ}\text{C}$), шаг сетки — 2 $^{\circ}\text{C}$; кривая отражает суточный ход температуры. Функция задана графически.

Ключевые шаги:

- По оси t находят заданный момент времени.
- От точки на оси t проводят вертикаль до пересечения с кривой.
- От точки пересечения проводят горизонталь к оси p — считывают

значение температуры.

Примеры по графику:

- $t=7 \Rightarrow p=-4$;
- $t=12 \Rightarrow p=2$;
- $t=17 \Rightarrow p=3$;
- $t=22 \Rightarrow p=0$.

График иллюстрирует функциональную зависимость $p=f(t)$: каждому значению t соответствует единственное значение p .

Домашнее задание. п. 12 (с. 54—56), №№ 259, 262, 264.