

Урок № 28, тема учебника «п.14. График функции».

Урок № 29, тема учебника «п.14. График функции».

Тема учебника «п.14. График функции».

14. График функции

Цели: формировать понятие «график функции», умение строить график функции, заданной аналитически, а также с помощью графика находить значение функции, соответствующее заданному значению аргумента, и значения аргумента, которым соответствует данное значение функции.

1) Устные упражнения

№ 1. Функция задана формулой: а) $y = 1,3x$; б) $y = 0,5 - 4x$.

Найдите значение аргумента, которому соответствует значение функции, равное 0.

№ 2. При каких значениях переменной x имеет смысл выражение:

а) $5-x$; б) $5/x$; в) $x/(x+3)$?

2) Изучение нового

п. 14 (с. 61—63) График функции. Примеры 1 и 2.

Тренировочные упражнения. №№ 283, 285, 287. Повторение: № 294 а.

1) Устные упражнения.

№ 1. Принадлежит ли графику функции, заданной формулой $y = 4/x$, точка: а) $A(-2; 2)$; б) $C(10; 2/5)$; в) $M(1/3; 12)$?

№ 2. (№ 289). Измеряя в течение десяти лет каждый год в день рождения рост ребёнка, построили график зависимости роста (m) от возраста ребёнка (l). Пользуясь графиком, найдите:

а) каков был рост ребёнка в 3 года; в 6 лет; в 9 лет;

б) на сколько сантиметров вырос ребёнок за первые 5 лет жизни; за последующие 5 лет жизни?

Тренировочные упражнения №№ 284, 288, 290, 291.

Если две координатные прямые расположить на плоскости перпендикулярно друг другу и совместить их начала, то получится декартова координатная плоскость. Прямые называются осями координат.

Одна (обычно, горизонтальная) ось называется осью x или осью абсцисс, другая — осью y или осью ординат.

Возьмём на координатной плоскости точку M и опустим из неё перпендикуляры на ось Ox и ось Oy .

Получим точки M_x , M_y , которые в данном случае имеют координату по оси Ox , равную 4, а по оси Oy — координату, равную 5. Числа 4 и 5 являются координатами точки M . Пишут: $M(4; 5)$. Причём 4 — это абсцисса точки M , а 5 — ордината точки M .

Говорят также, что $(4; 5)$ — координаты точки M .

Отметьте на координатной плоскости:

- а) $A(4; 1)$;
- б) $B(-5; -2)$;
- в) $C(-2; 1)$;
- г) $D(4; -3)$;
- д) $E(0; -5)$;
- е) $F(2, 5; 0)$;
- ж) $G(0; 1)$;
- з) $I(-7; 0)$.

Координатные прямые делят плоскость на четыре части, называемые четвертями или квадрантами. В первой (I) четверти лежат точки, обе координаты которых положительны; во второй (II) четверти лежат точки, имеющие отрицательную абсциссу и положительную ординату; в) в третьей (III) — точки, обе координаты которых — отрицательные числа, а в четвёртой (IV) — абсцисса положительна, а ордината отрицательна. Точки, лежащие на координатных осях, не принадлежат ни одной из координатных четвертей.

Опишите расположение на координатной плоскости следующих точек.

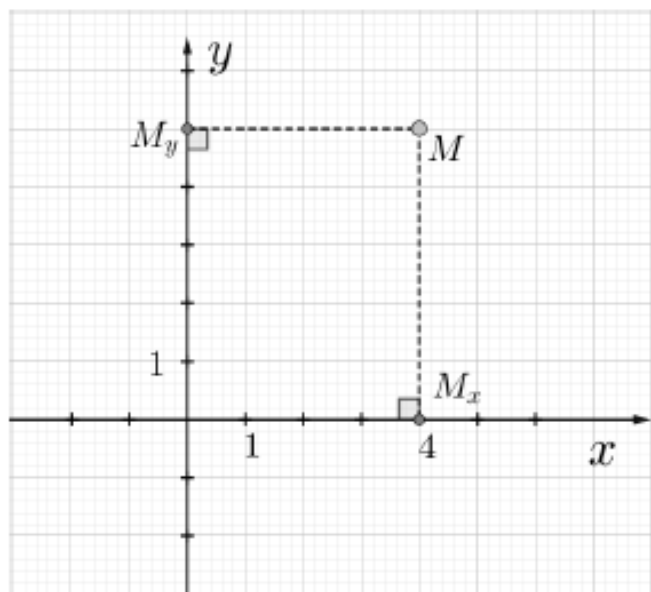
- а) точки, абсцисса которых равна нулю;
- б) точки, ордината которых равна нулю;
- в) все точки, абсцисса которых равна трём;
- г) все точки, ордината которых равна -1 ;
- д) точки, абсцисса и ордината которых имеют разные знаки;
- е) точки, абсцисса и ордината которых имеют одинаковые знаки;
- ж) точки, у которых абсцисса и ордината равны;
- з) точки, абсцисса и ордината которых — противоположные числа.

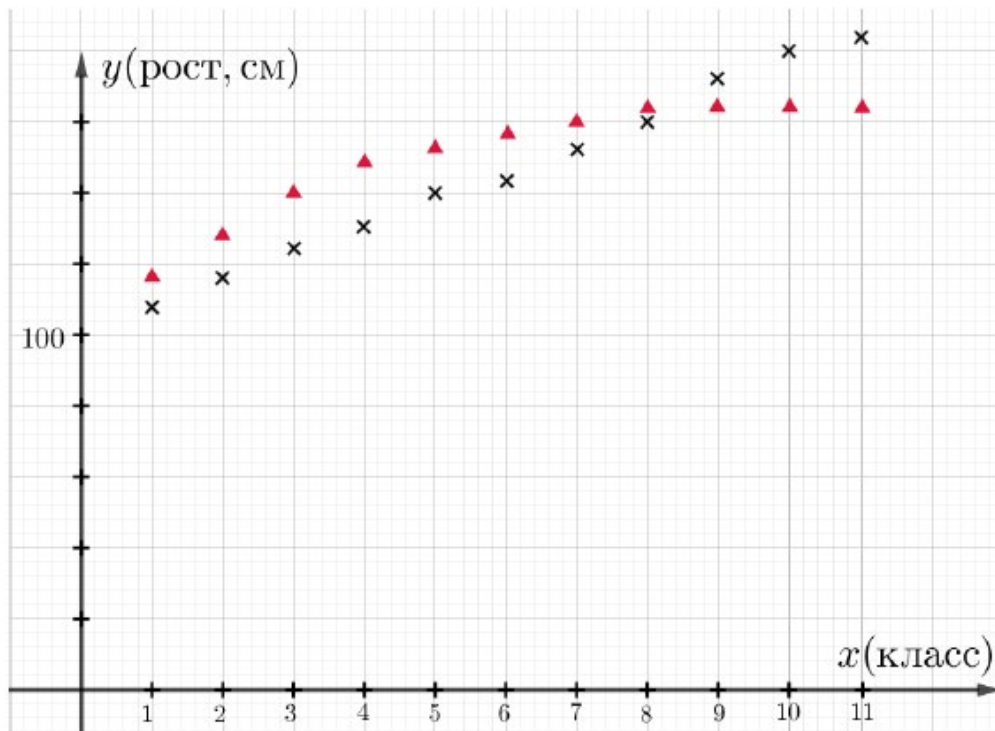
Примеры из практики.

Пример. Ответьте на вопросы.

Двойняшки Наташа и Ваня всю свою школьную жизнь каждый год 1 сентября отмечали свой рост на координатной плоскости, см. рис. ниже. Наташа — треугольничками, а Ваня — крестиками.

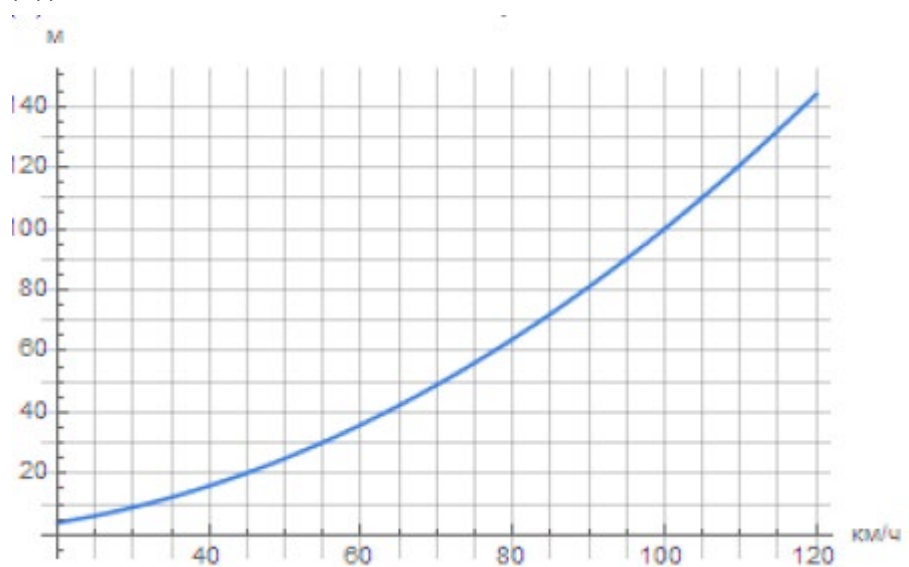
- а) Какого роста был Ваня в начале 7-го класса? А Наташа?
- б) Кто был выше в начале школы? А в конце?
- в) Когда ребята были почти одинакового роста?
- г) Что происходило с ростом Наташи в 8, 9 и 10 классе?
- д) За какой год Ваня вырос больше всего? На сколько?





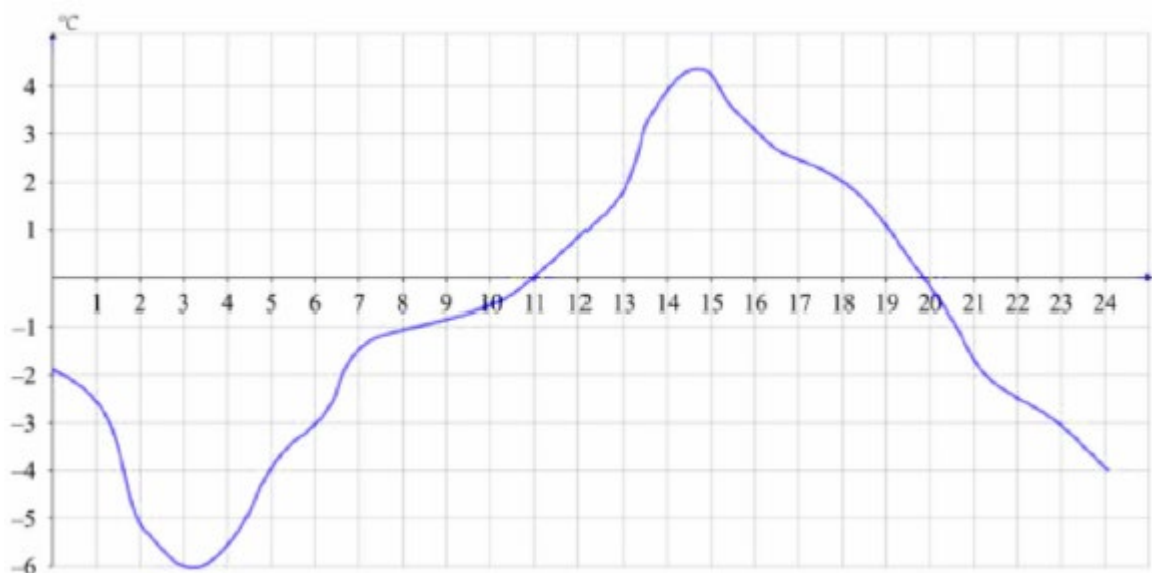
Графиком функции f называется множество точек координатной плоскости с координатами вида $(x; f(x))$.

Пример. Длина тормозного пути зависит от скорости, состояния проезжей части, шин, погодных условий. Однако, если считать, что мы уже едем в каком-то автомобиле по какой-то дороге, то погоду и состояние шин изменить непросто, и можно считать, что эти параметры зафиксированы. Остаётся один переменный параметр — скорость, и тогда длина тормозного пути — функция скорости. Примерная зависимость тормозного пути автомобиля от скорости показана на графике справа.



Определите по графику, каким будет тормозной путь автомобиля при скорости 100 км/ч? А при скорости 50 км/ч? При какой скорости тормозной путь будет больше 50 м? Меньше 120 м?

Пример. На рисунке приведён один из графиков зависимости температуры от времени в течение суток.

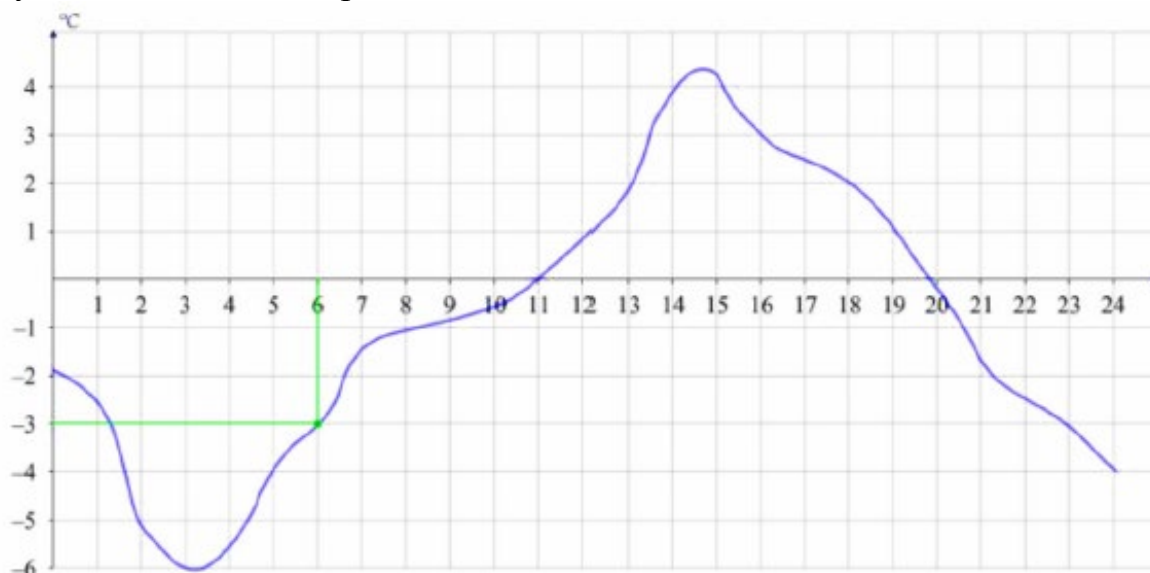


С помощью этого графика мы можем получить очень много информации о температуре за рассматриваемые сутки. Например, легко узнать, какая температура была в каждый из интересующих нас моментов времени. Скажем, чтобы найти значение температуры в 6 часов, возьмём отметку, соответствующую моменту времени 6:00 на оси абсцисс, и проведём через неё прямую, перпендикулярную оси абсцисс, до пересечения с графиком.

Через полученную точку на графике проведём прямую, перпендикулярную оси ординат.

Точка пересечения этой прямой с осью ординат и даст искомое значение температуры.

Из рисунка видно, что оно равно -3°C .

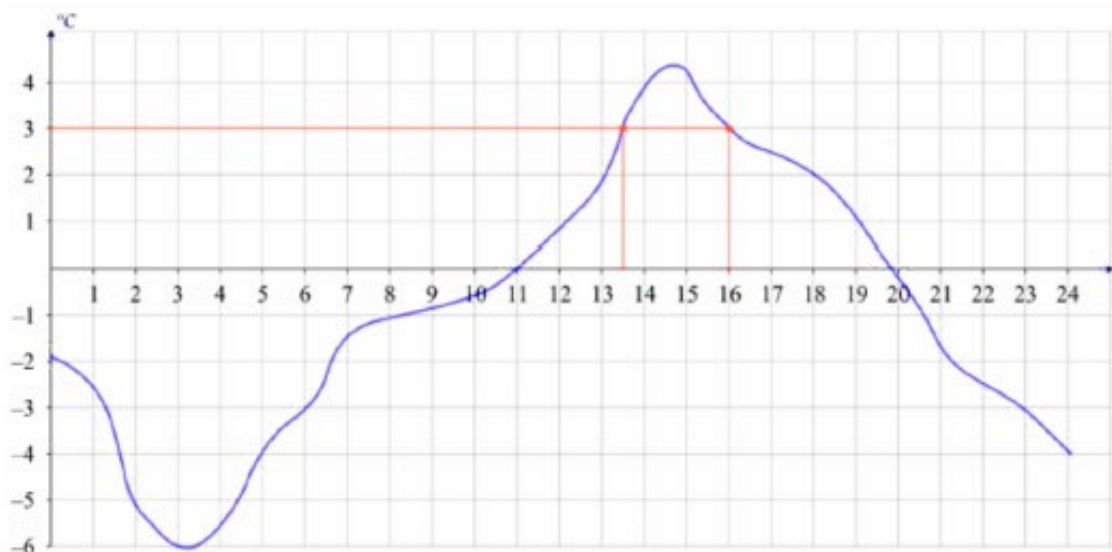


Если мы захотим найти значение температуры в 17 часов и выполним такие же действия, то найдём с помощью графика соответственное значение температуры лишь приближённо: оно равно примерно $+2^{\circ}\text{C}$.

Аналогично можно находить с помощью графика моменты времени, в которые температура принимает интересующее нас значение, скажем, $+3^{\circ}\text{C}$. Для этого возьмём точку 3 на оси ординат (именно на этой оси откладываются значения температуры) и проведём через неё прямую, перпендикулярную оси ординат, до пересечения с графиком. Таких точек пересечения оказалось две. Рассмотрим проекции этих точек на

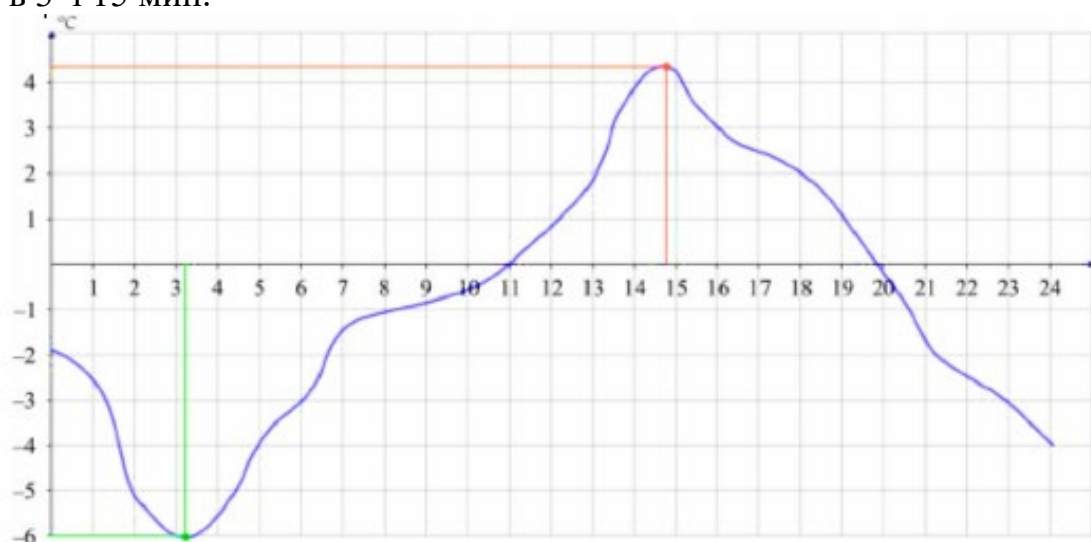
ось абсцисс (то есть точки пересечения проведённых через них вертикальных прямых с осью абсцисс).

Эти проекции и дадут искомые моменты времени. Из рисунка видно, что это примерно 13 ч 30 мин и 16 ч.



С помощью графика также можно найти наибольшее и наименьшее значение температуры за рассматриваемые сутки. Наибольшее значение температуры — это наибольшая из ординат всех точек, принадлежащих графику. Понятно, что наибольшую ординату имеет самая высокая точка графика. Аналогично обстоят дела с наименьшим значением температуры

— это ордината самой низкой точки графика. Отметив на нашем графике самую высокую и самую низкую точки и определив их абсциссы и ординаты, мы можем сказать, что наибольшее значение температуры примерно равно $+4,5^{\circ}$ и наблюдалось примерно в 14 ч 45 мин. Наименьшее значение температуры равно -6° и наблюдалось в примерно в 3 ч 15 мин.



Из анализируемого нами графика можно извлечь также много другой полезной информации.

Видно, что в момент начала наблюдений (0 часов) температура воздуха была -2° , затем она постепенно понижалась и, достигнув примерно в 3 часа своего наименьшего значения, равного -6° , стала возрастать, сначала побыстрее, затем помедленнее и достигла отметки 0° в 11 часов, причём за последние три часа перед этим, с 8 до 11 часов она повысилась всего на 1 градус (от -1° до 0°). После этого температура

продолжала увеличиваться дальше и достигнув своего наибольшего значения, примерно равного $+4,5^{\circ}$, между 14 и 15 часами, около 14 ч 40 мин, стала уменьшаться и уменьшалась до конца суток (24 часа), когда достигла значения -4° . При этом переход через 0° произошёл в 20 часов. Из графика видно также, что положительной за рассматриваемые сутки температура была в течение 9 часов (с 11.00 до 19.00), остальные 15 часов температура была ниже нуля.

Не всегда бывает нужно строить точный график зависимости, чтобы проиллюстрировать процесс.

Пример. Соотнесите процессы с иллюстрирующими их графиками. Для того, чтобы не удалось схитрить и воспользоваться знанием физических величин, на графиках отмечена только ось времени, без единиц измерения и даже без единичных отрезков. Однако началу координат всегда соответствует нуль. Найдите, какой из графиков соответствует зависимости:

- а) количества песка в верхней чаше песочных часов от времени;
- б) скорости спуска с горы на сноуборде от времени;
- в) скорости спутника во время его запуска на орбиту.



Зная процесс, мы можем представить, как выглядит график. Например, когда мы начинаем катиться с горы на сноуборде, сначала наша скорость невелика (а в начале пути она и вовсе равна нулю), потом становится всё больше и больше, достигая в какой-то момент максимума, но затем, в момент торможения, опять уменьшается до нуля.

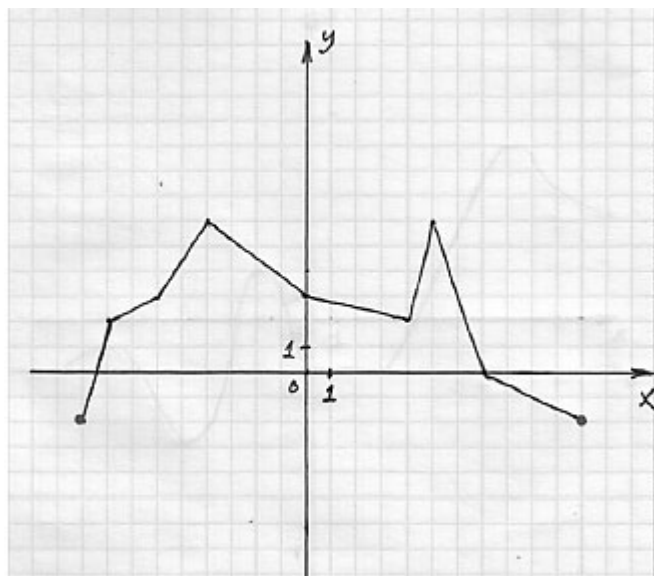
Посмотрев, на каком из графиков величина ведёт себя подобным образом, мы с уверенностью скажем, что процессу соответствует первый график из трёх предложенных. Аналогично, можно представить, как ведёт себя песок в верхней чаше песочных часов. Нам достаточно заметить, что сначала песка много, а потом нет совсем. После этого мы уже сможем выбрать график, соответствующий данному процессу. Оставшийся соответствует запуску спутника на орбиту. Однако, если графики не были бы объединены в одно упражнение, то метод исключения нам бы не помог и пришлось бы исследовать процесс как в случае со спуском на сноуборде.

Пример.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$.

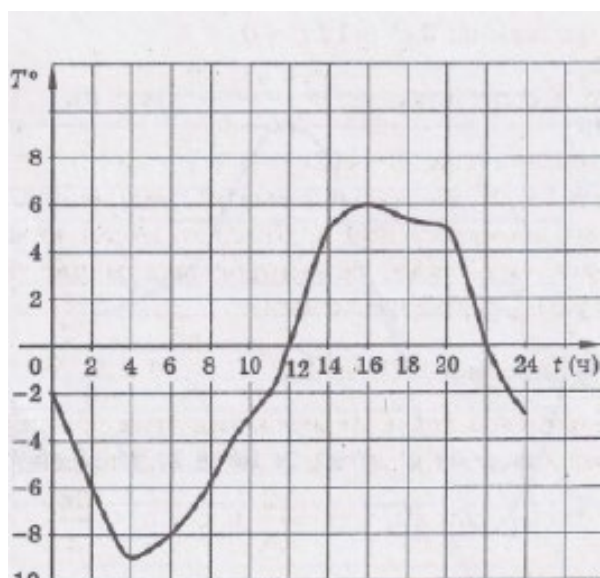
Найдите:

- а) область определения функции;
- б) множество значений функции;
- в) координаты точек пересечения графика функции с осями координат;
- г) значение функции в точке -6 ; -3 ; 2 ;
- 0;
- д) при каком значении аргумента функция принимает значение 2 ; 6 ; -1 ; -2 ;
- е) наибольшее и наименьшее значение функции;
- ж) все значения x , при которых функция принимает положительные значения;
- з) все значения x , при которых функция принимает отрицательные значения.



Пример. На графике показано изменение температуры воздуха в течение суток.

- а) Какая температура была в 6 ч?
- б) Когда температура была равна 0°C ; -6°C ?
- в) Когда температура была положительной?
- г) Какова максимальная температура за сутки?
- д) Когда температура повышалась?
- е) Сколько часов температура не превышала -6°C ?



Занимательные задачи.

1. Кот в течение трёх часов лежит на одном месте в двух метрах от дуба. Как выглядит график зависимости расстояния между дубом и котом от времени?
2. Черепашка проползает 1 метр за минуту. Как будет в течение 10-минутной прогулки выглядеть график зависимости расстояния, пройденного черепашкой (в метрах), от времени (в минутах)?
3. В январе мороженое «Пломбир на палочке» продавалось по цене 70 руб. за штуку, а шоколадка «Мышонок» по цене 40 руб. за штуку. Потом каждый месяц до апреля включительно мороженое дешевело на 5 рублей, а шоколадка дорожала на 10 рублей. С мая по июль мороженое дорожало на 10 рублей ежемесячно, а шоколадка дешевела на 5 рублей. В августе всё подорожало на 20 рублей. С сентября по декабрь все цены оставались неизменными.
 - а) Постройте графики зависимости цен на два товара. Какой масштаб удобно выбрать?
 - б) Когда первый товар стоил дороже? Когда товары стоили одинаково?
 - в) Когда второй товар стоил дешевле всего за год?

График функции — множество точек $(x; y)$ координатной плоскости, где x — значение аргумента, y — соответствующее значение функции.

Формализуем: $G = \{(x, f(x)) | x \in D(f)\}$.

График функции — множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.

При рассмотрении графика функции слева направо на нём видны участки, где значения функции увеличиваются (говорят, что функция возрастает) и участки, где значения функции уменьшаются (говорят, что функция убывает).

Рассмотрим конкретный график.

По графику видно, что при изменении аргумента от 0 до 2 функция убывает (значения функции уменьшаются с ростом аргумента), а при изменении аргумента от 2 до 5 функция возрастает (значения функции увеличиваются с ростом аргумента).

На числовой прямой часто бывает удобно рассматривать не отдельные числа, а числовые промежутки — участки прямой от одного числа до другого.

Отметим две такие точки a и b так, что $a < b$, и рассмотрим промежуток — все возможные точки x между ними. Точки a и b называются концами промежутка. Они могут включаться в промежуток, а могут не включаться.

Если концы промежутка включены, то на изображении числовой прямой их закрашивают. Если же они исключены или, как чаще говорят, выколоты, то их отмечают белым (пустым или выколотым) кружком. При записи промежутка включённые концы обозначают квадратной скобкой, а выколотые — круглой. В зависимости от того, какие из крайних точек a и b мы включаем в промежуток, а какие нет, возможны четыре случая:

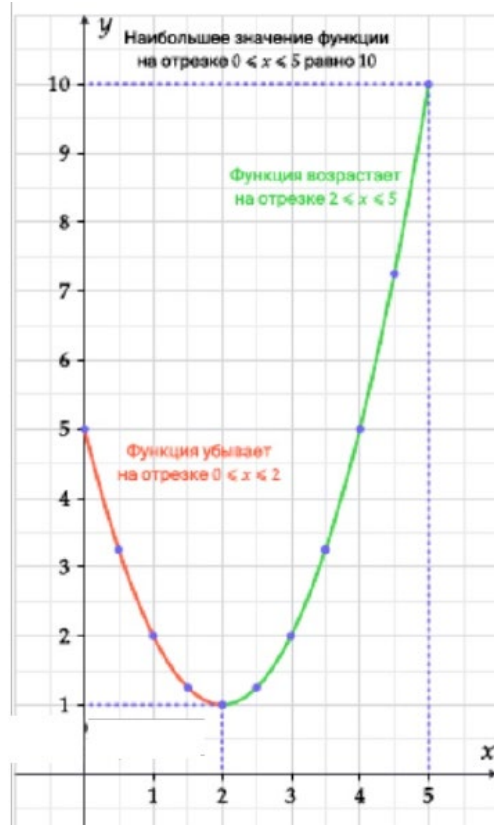
1. $a \leq x \leq b$; 2. $a < x < b$; 3. $a < x \leq b$; 4. $a \leq x < b$.

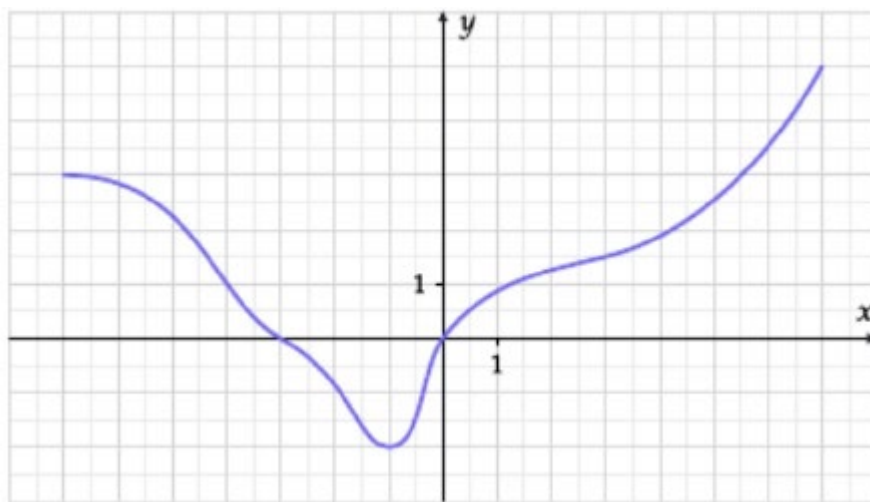
Функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции.

Функция $y = f(x)$ убывает на промежутке, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции.

Кроме промежутков монотонности у функции также могут быть и промежутки постоянства, то есть такие промежутки, во всех точках которых значение функции одно и то же.

Сделаем важное замечание по поводу промежутков монотонности. Функция, график которой изображён на рисунке ниже, возрастает на промежутках $0 < x < 5$, $-1 \leq x \leq 1$, $1 \leq x < 4$ и на многих других.



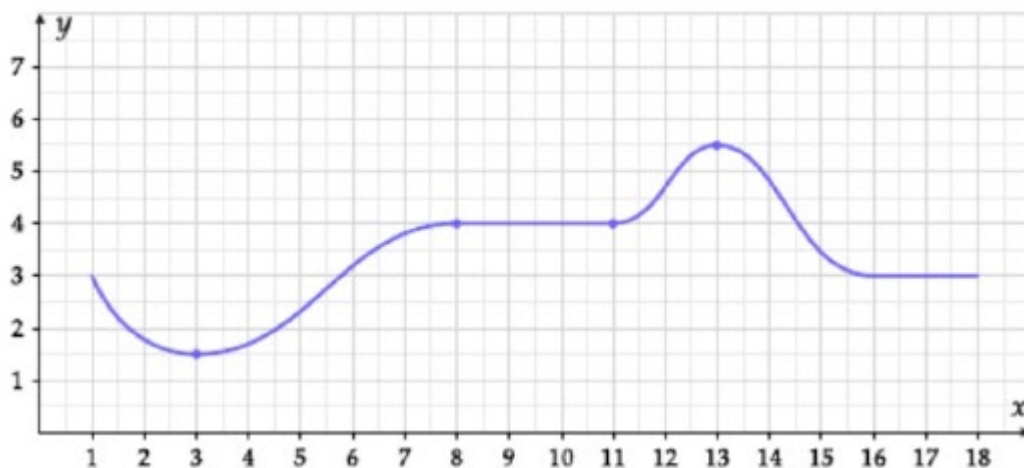


Но когда говорят о промежутках монотонности данной функции, то указывают наибольший из возможных. Для данной функции такими промежутками являются: промежуток $-7 \leq x \leq -1$, на котором функция убывает, и промежуток $-1 \leq x \leq 7$, на котором функция возрастает.

Для функций, заданных формулой, нахождение промежутков возрастания и убывания в большинстве случаев представляет собой весьма непростую задачу. Для её решения применяется специальная техника, с которой вы познакомитесь в старших классах. Если же функция задана графически, то промежутки монотонности находятся относительно несложно.

Если в определении возрастающей функции вместо строгого неравенства записать нестрогое, то получим определение нестрого возрастающей или неубывающей функции.

Для таких функций промежутки (нестрогой) монотонности будут иногда отличаться от промежутков строгой монотонности.



Например, для функции, график которой изображён на рисунке выше, $3 \leq x \leq 8$ и $11 \leq x \leq 13$ — промежутки возрастания. А $8 \leq x \leq 11$ — промежуток постоянства. В то же время $3 \leq x \leq 13$ — промежуток неубывания (нестрогой возрастания).

Однако под монотонностью почти всегда подразумевается строгая монотонность, а если есть необходимость использовать нестрогую монотонность, это принято специально оговаривать.

Домашнее задание. п. 14 (с. 61—63), №№ 286, 289, 294 б.

Домашнее задание. п. 14, №№ 292, 294 в, 295, № 355; № 356*.

Список дополнительной литературы

- [1] Александр Шень (под ред.). Задачи по математике, предлагавшиеся ученикам математического класса 57 школы (выпуск 2000 года, класс В) (с1). М.: МЦНМО, 2000, 272 с. <https://www.mccme.ru/free-books/57/shen.pdf>
- [2] Владимир Дубровский. Удивительные числа. Журнал. Квантик, 2012, №1. <http://old.kvantik.com/art/files/pdf/2012-01.7-9.pdf>
- [3] Егор Бакаев. Рисуем сумму нечётных чисел. Журнал. Квантик, 2015, №3. <http://old.kvantik.com/art/files/pdf/2015-03.16-17.pdf>
- [4] Миниатюра .Сумма нечётных чисел.. Сайт. Математические этюды. <http://www.etudes.ru/ru/sketches/odd-numbers-sum/>
- [5] Сайт .Сдам ГИА.. ВПР по биологии, задача 19. <https://bio6-vpr.sdangia.ru/problem?id=19>