Тема урока «Исследование и построение графиков элементарных функций (10 класс)»

Учебник. Математика: алгебра и начала математического анализа, М34 **геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10—11 классы:** базовый и углублённый уровни: учебник / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва [и др.]. — 11-е изд., стер. — Москва: Просвещение, 2023. — 463, [1].

Приёмы построений графиков функций, рассмотренные на данном уроке, значительно расширяют класс функций, графики которых можно построить. Это, в свою очередь, позволяет более широко использовать графические приёмы при решении различных задач.

Что важно запомнить?

Основные этапы исследования и построения графика функции включают следующие шаги:

1. Определение области определения

Это те значения аргумента (x), при которых функция существует. Например, квадратный корень имеет смысл только для неотрицательных чисел.

2. Нахождение точек пересечения с осями координат

Находим координаты точек, где график пересекает оси x и y. Для этого подставляем x=0 и y=0 соответственно.

3. Исследование чётности/нечётности и периодичности

Если функция чётная ($f(-x) = f(x)$, $x \in D(f(x))$, график симметричен относительно оси Oy — можно построить правую половину и отразить её. Если нечётная ($f(-x) = -f(x)$, $x \in D(f(x))$ — график симметричен относительно начала координат. Периодичность означает, что функция повторяется через равные промежутки по оси Ox.

4. Вычисление производной и определение интервалов монотонности (можно найти промежутки монотонности, используя элементарные методы)

Производная показывает скорость изменения функции. Если производная положительна, то функция возрастает, а если отрицательна – убывает.

5. Поиск экстремумов (можно найти точки экстремума, используя элементарные методы)

Экстремумы – это максимальные и минимальные значения функции внутри заданного интервала. Они находятся там, где производная равна нулю или не существует.

6. Построение асимптот

Асимптоты – линии, к которым приближается график функции, но никогда не достигает. Бывают вертикальными, горизонтальными и наклонными.

7. Построение самого графика

Используя всю собранную информацию, аккуратно наносим точки и соединяем их плавной кривой.

#293642

«АЛГЕБРА • 10»

ИССЛЕДОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Методы графического анализа функций и алгоритмы их преобразования

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

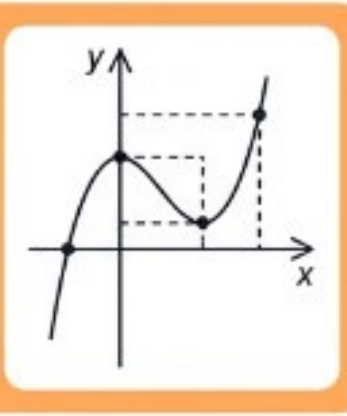
- Линейные, дробно-рациональные, степенные, показательные, логарифмические, тригонометрические и обратные тригонометрические функции.
- Составляют основу для изучения математического анализа.

Примеры: $y = x^2$, $y = 2^x$, $y = \sin x$

АЛГОРИТМ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ

1. Область определения и область значений.
2. Четность, нечетность и периодичность.
3. Точки пересечения с осями координат.
4. Интервалы знакопостоянства и монотонности.
5. Экстремумы функции.

Исследование позволяет построить точный эскиз графика.

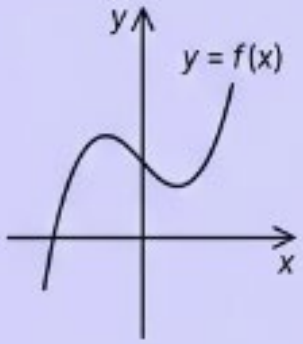


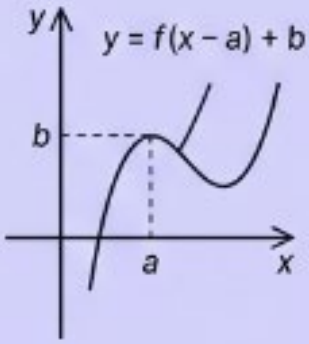
ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС ГРАФИКА

Преобразование графика функции с помощью смещения вдоль осей координат.

$y = f(x - a) + b$

Смещение на a по оси x и на b по оси y.





РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ ГРАФИКА

Изменение масштаба графика вдоль координатных осей с помощью коэффициентов.

$$y = k \cdot f(c \cdot x)$$

При $k > 1$ — растяжение вдоль оси y, при $0 < k < 1$ — сжатие.

ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ ПРИ ПОСТРОЕНИИ

- Игнорирование области допустимых значений.
- Неверное определение знака при сдвиге вдоль оси x.
- Отсутствие проверки на четность и нечетность.

Для $y = f(x - 2)$ сдвиг происходит вправо, а не влево.

Что показано на графике

На графике в правой части изображения представлены три параболы — преобразования базовой функции $y=x^2$:

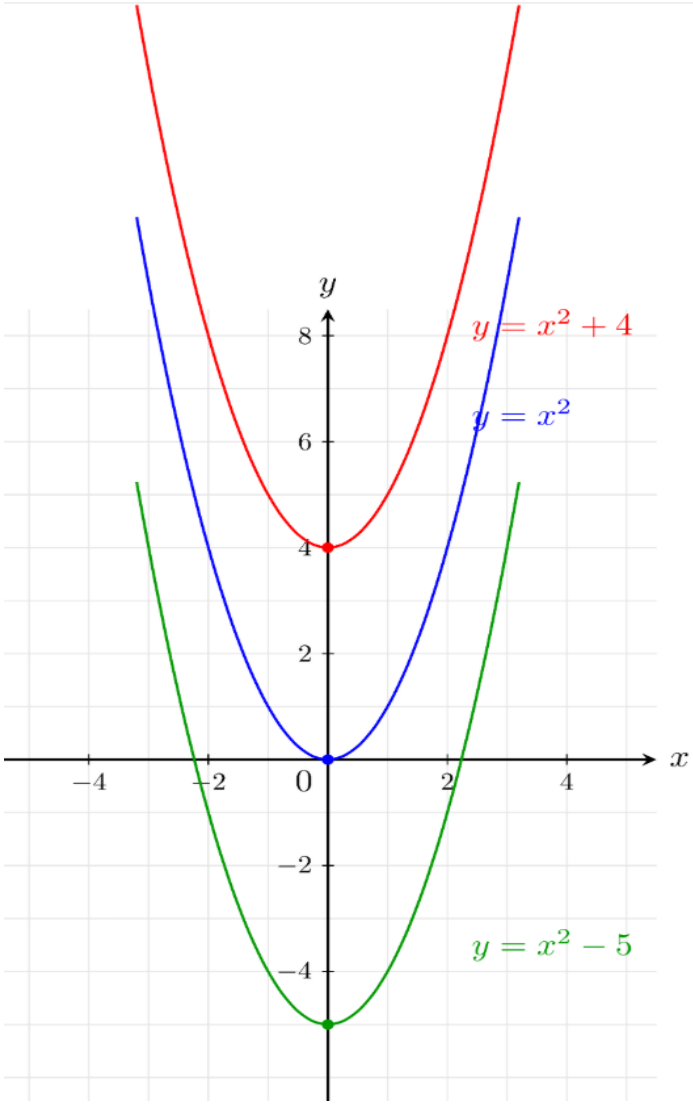
- $y=x^2$ — исходная парабола с вершиной в начале координат (0;0);
- $y=x^2+4$ — та же парабола, сдвинутая **на 4 единицы вверх** вдоль оси Oy (вершина в точке (0;4));
- $y=x^2-5$ — парабола, сдвинутая **на 5 единиц вниз** вдоль оси Oy (вершина в точке (0; −5).

Это наглядно демонстрирует правило: график функции $y=f(x)+b$ получается из графика $y=f(x)$ сдвигом на b единиц вдоль оси ординат (вверх при $b>0$, вниз при $b<0$).

На этом графике:

- **синим** выделена базовая парабола $y=x^2$;
- **красным** — её сдвиг вверх на 4 единицы ($y=x^2+4$);
- **зелёным** — сдвиг вниз на 5 единиц ($y=x^2-5$).

Вершины всех парабол отмечены точками, чтобы было видно, как именно происходит параллельный перенос вдоль оси Oy.

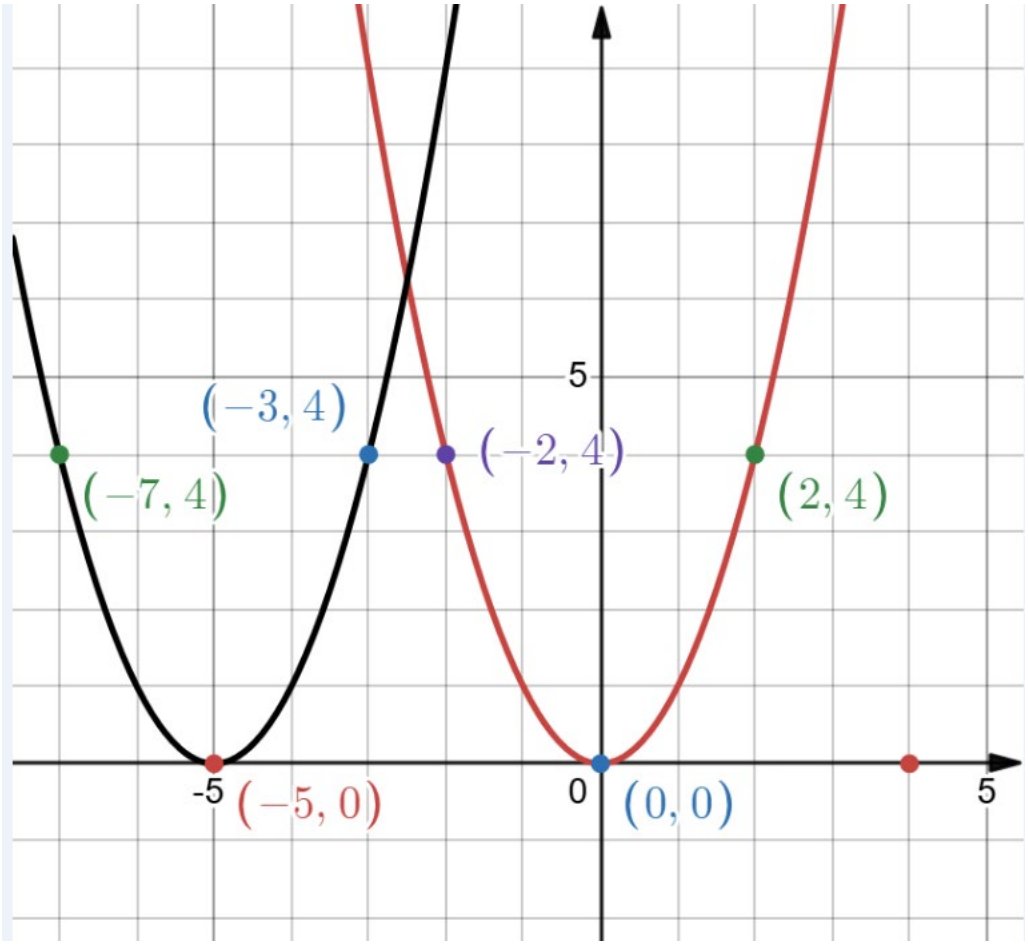


Пошаговая инструкция по построению

а) Сдвиг вдоль оси Ox: $y = f(x + a)$

1. Строим базовый график $y = f(x)$, например $y = x^2$ с вершиной в точке $(0; 0)$.
2. Смотрим на знак a: при $a > 0$ сдвигаем график **влево** на a единиц, при $a < 0$ — **вправо** на $|a|$.
3. На примере: $y = (x + 5)^2$ — парабола сдвинута влево, вершина в точке $(-5; 0)$; $y = (x - 4)^2$ — вправо, вершина в $(4; 0)$.
4. Помечаем новые вершины точками и проводим параболу той же формы — она просто «едет» по оси Ox, не растягиваясь.

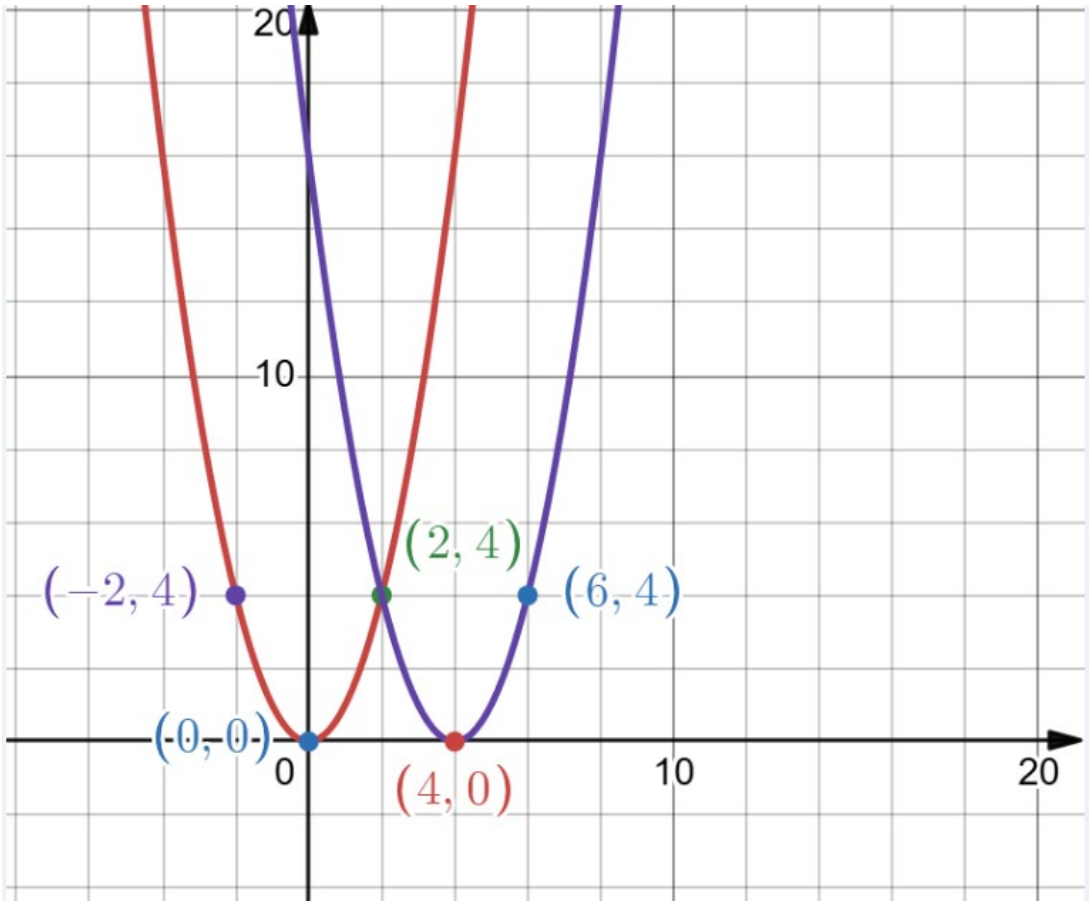
Запомнить легко: знак a «работает наоборот» — плюс уводит график в минус по x.



На координатной плоскости:

красным – график функции $y=x^2$;

черным – график функции $y=(x+5)^2$ (сдвиг влево на 5 единиц красного графика $y=x^2$).



На координатной плоскости:

красным – график функции $y=x^2$;

фиолетовым график функции $y=(x-4)^2$– сдвиг вправо на 4 единицы $y=x^2$.

б) Отражение относительно оси Ox: $y = -f(x)$

1. Строим базовый график $y = f(x)$.
2. Каждую точку $(x; y)$ заменяем на $(x; -y)$: то, что было выше оси Ox, окажется ниже на таком же расстоянии, и наоборот.
3. Практически: берём несколько характерных точек базового графика, меняем у них знак второй координаты, отмечаем и плавно соединяем.
4. На схеме это видно по пунктирным «перемычкам»: точки зеркально переехали вниз-вверх относительно оси Ox.

в) Отражение относительно оси Oy: $y = f(-x)$

1. Строим базовый график, например $y = \sqrt{x}$ — он существует только при $x \geq 0$.
2. Каждую точку $(x; y)$ заменяем на $(-x; y)$: график зеркально отражается относительно вертикальной оси.
3. Для $y = \sqrt{-x}$ это значит, что график теперь живёт при $x \leq 0$ и «уходит» влево от начала координат.
4. Высота каждой точки не меняется — меняется только её положение по горизонтали.

Общий принцип: знак внутри скобок (при x) меняет картинку по горизонтали, знак перед функцией — по вертикали.

Задача 1. Линейная функция

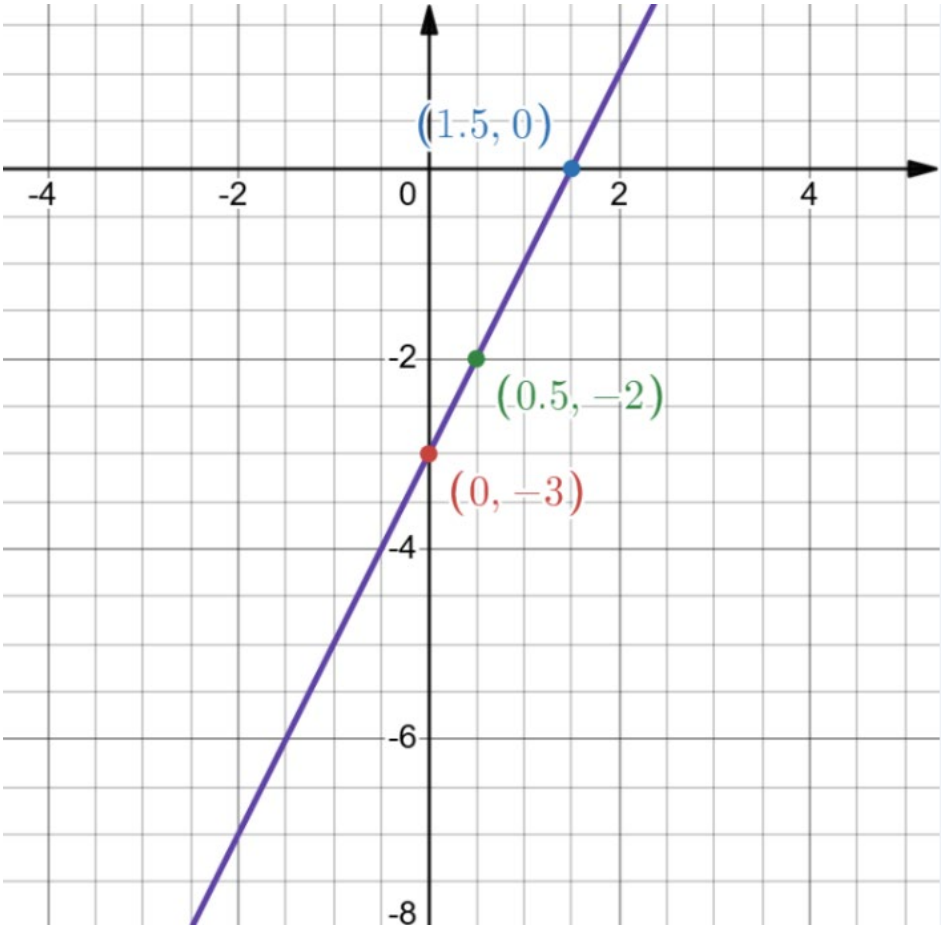
Дано: $y = 2x - 3$.

Чертеж: прямая на координатной плоскости.

Шаги:

- $D(y) = \mathbb{R}$, $E(y) = \mathbb{R}$.
- Нули: $2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1{,}5$.
- Точка пересечения с Oy: $x = 0 \Rightarrow y = -3$.
- Угловой коэффициент $k = 2 > 0$: функция возрастает на $\mathbb{R}$.
- Точки для построения: $(0; -3)$, $(1{,}5; 0)$, $(2; 1)$.

  Ответ: график — прямая, проходящая через указанные точки, возрастает.



Задача 2. Квадратичная функция

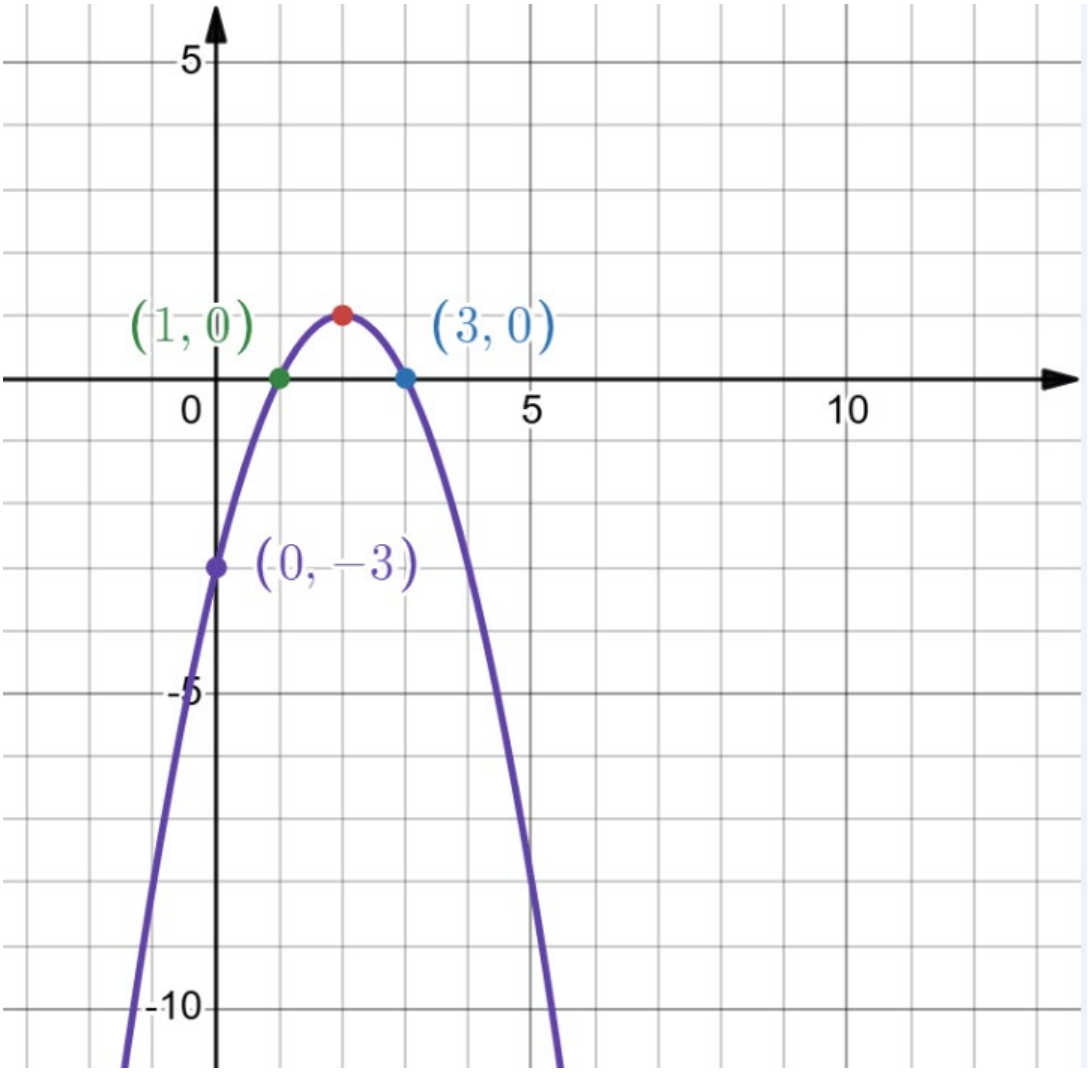
Дано: $y = -x^2 + 4x - 3$.

Чертеж: парабола, ветви вниз.

Шаги:

- $D(y) = \mathbb{R}$.
- Нули: $-x^2 + 4x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 3$.
- Вершина: $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{-2} = 2,\ y_0 = -4 + 8 - 3 = 1$.
- Точка пересечения с Oy: $x = 0 \Rightarrow y = -3$.
- Промежутки монотонности: возрастает на $(-\infty; 2]$, убывает на $[2; +\infty)$.
- Максимум в точке $(2; 1)$.

  Ответ: парабола с вершиной $(2; 1)$, пересекает Ox в $x = 1$ и $x = 3$, Oy в $y = -3$.



Задача 3. Степенная функция (корень)

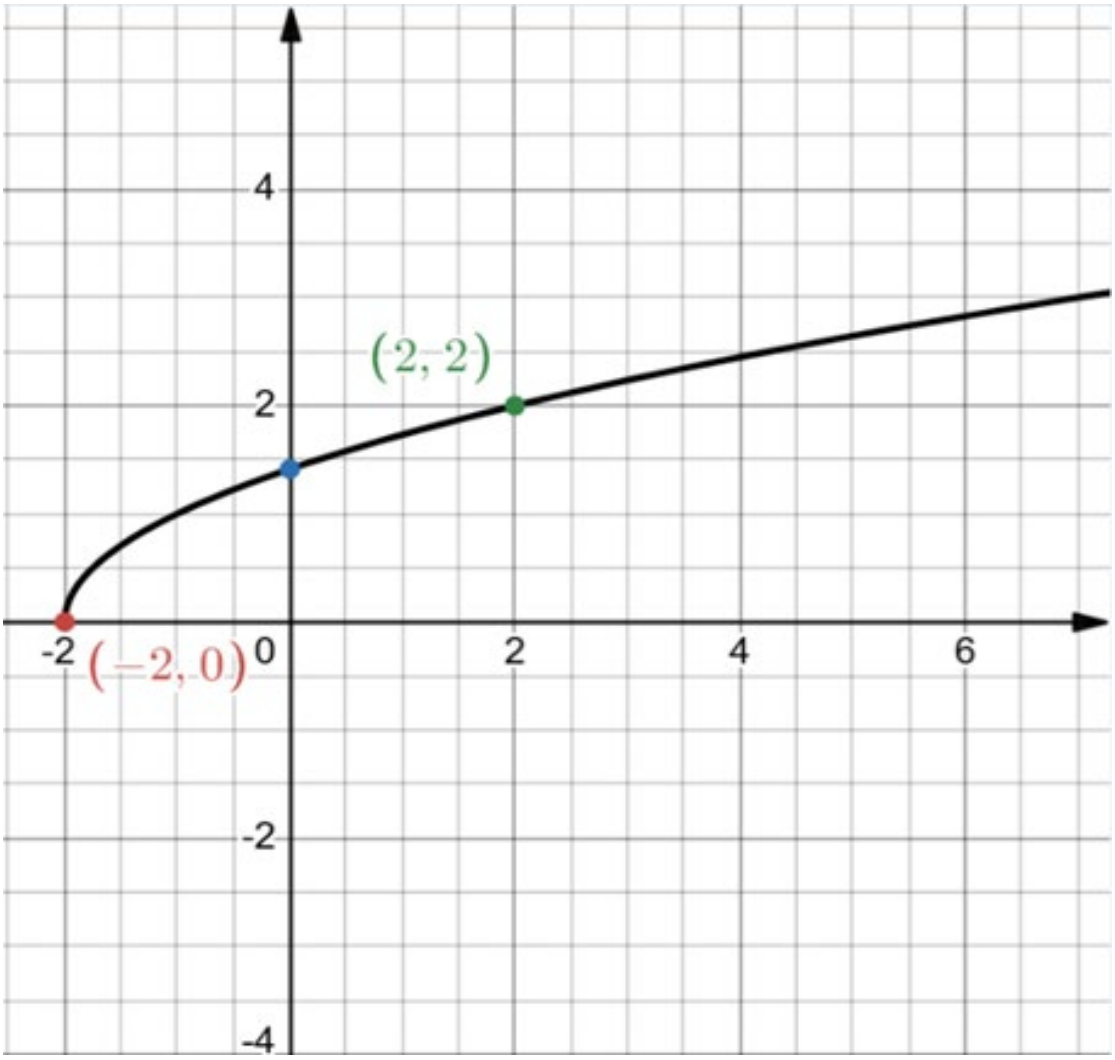
Дано: $y = \sqrt{x+2}$.

Чертеж: ветвь параболы, повернутая на $90°$, начинается в $(-2;0)$.

Шаги:

- $D(y): x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$.
- Нули: $\sqrt{x+2} = 0 \Rightarrow x = -2$.
- Точка пересечения с Oy: $x = 0 \Rightarrow y = \sqrt{2} \approx 1{,}41$.
- Функция возрастает на $[-2; +\infty)$.
- Точки: $(-2;0)$, $(-1;1)$, $(2;2)$.

  Ответ: график — ветвь корня, начинается в $(-2;0)$, возрастает.



Задача 4. Дробно-линейная функция

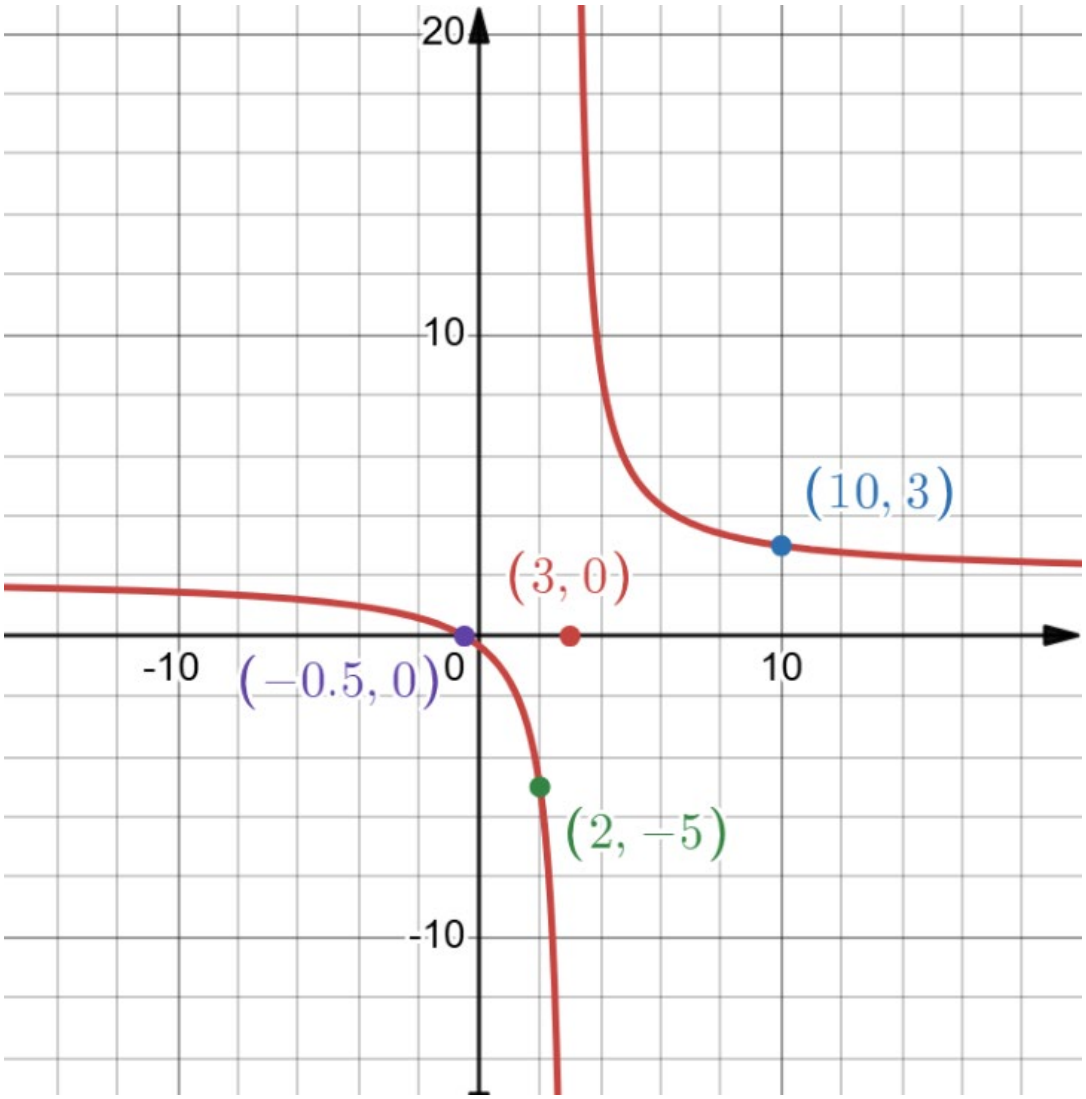
Дано: $y = \frac{2x+1}{x-3}$.

Чертеж: гипербола с асимптотами.

Шаги:

- $D(y) : x \neq 3$.
- Вертикальная асимптота: $x = 3$.
- Горизонтальная асимптота: $y = \frac{2}{1} = 2$.
- Нули: $2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -0{,}5$.
- Точка пересечения с Oy: $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}$.
- Поведение: при $x \to 3^-$: $y \to -\infty$, при $x \to 3^+$: $y \to +\infty$.

  Ответ: гипербола с асимптотами $x = 3$, $y = 2$, нуль в $x = -0{,}5$.



Задача 5. Преобразование графика

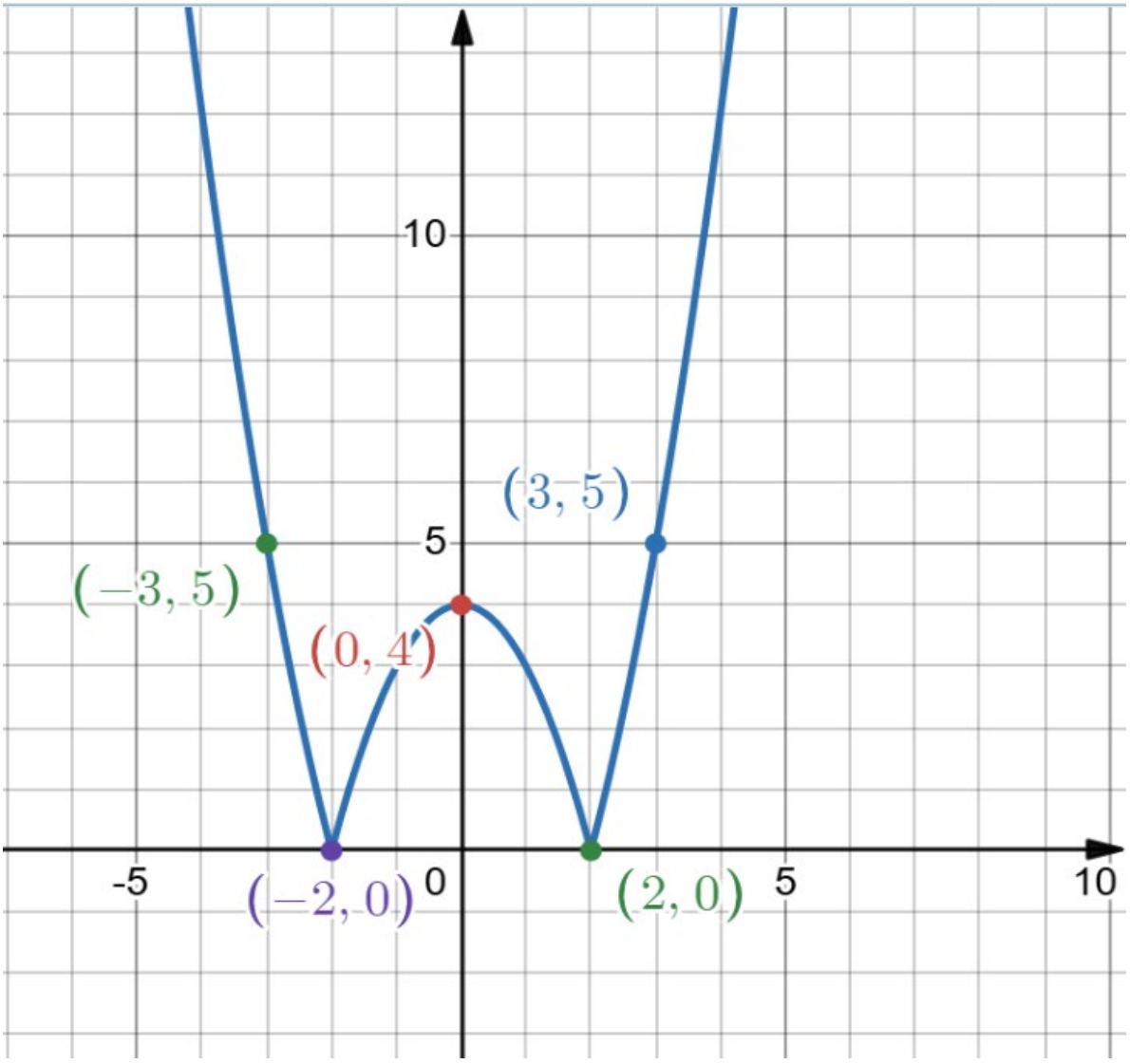
Дано: построить $y = |x^2 - 4|$ на основе $y = x^2 - 4$.

Чертеж: парабола, нижняя часть отражена вверх.

Шаги:

- Исходная парабола: $y = x^2 - 4$, вершина $(0; -4)$, нули $x = \pm 2$.
- Модуль: части графика ниже Ox отражаются симметрично вверх.
- Новые точки: $(0; 4)$ вместо $(0; -4)$, нули сохраняются.
- Участки: при $|x| \geq 2$: $y = x^2 - 4$; при $|x| < 2$: $y = -(x^2 - 4) = 4 - x^2$.

Ответ: график в форме W



Суть темы «Элементарное исследование и построение графиков функций»

- Тема учит понимать функции через их графики.
- Функция — это зависимость одной величины от другой, например, остаток денег при ежедневных тратах определённой суммы.
- График наглядно показывает связь величин, позволяет увидеть закономерности и особенности их изменения.

Зачем изучать тему

- Графическое представление помогает быстро понять свойства функции: её экстремумы (максимумы и минимумы), точки пересечения с осями координат, интервалы монотонности (где функция растёт или убывает).
- Знание графиков полезно не только в математике, но и в повседневной жизни — например, при построении графика температуры воздуха или расхода электроэнергии.

Основные этапы исследования и построения графика функции

- Определить область определения — значения аргумента (x), при которых функция существует (например, квадратный корень имеет смысл только для неотрицательных чисел).
- Найти точки пересечения графика с осями координат — для этого подставляют $x = 0$ и $y = 0$.
- Исследовать чётность/нечётность и периодичность функции: функция может быть симметричной относительно начала координат (нечётной) или оси ординат (чётной), а периодичность означает, что функция повторяется через равные промежутки.
- Определить интервалы монотонности: функция возрастает, если большему значению аргумента x (x из области определения функции) соответствует большее значение функции y (y из области значений функции); функция убывает, если большему значению аргумента x (x из области определения функции) соответствует меньшее значение функции y (y из области значений функции).
- Найти точки экстремума — точки из области определения функции, в которых функция может принимать свои наибольшие или наименьшие значения внутри заданного интервала.
- Построить асимптоты — линии, к которым приближается график функции, но никогда не достигает (бывают вертикальными, горизонтальными и наклонными).
- В конце нужно построить сам график — нанести точки, используя собранную информацию, и соединить их плавной линией.

Пример применения знаний на практике

- Если открыть бизнес по продаже мороженого, можно построить график зависимости количества покупателей от погоды.
- Чем выше температура, тем больше людей захотят купить мороженое.
- Такой график поможет заранее подготовиться к наплыву клиентов и оптимизировать запасы продукции.

Пример 1. Линейная функция: логистика и бюджет

Функция: y=2x−3 (в реальности это может быть, например C=50x+1000, где C — стоимость перевозки, x — количество рейсов).

Практика: транспортная компания берёт фиксированную плату за оформление заказа (1000 руб.) и по 50 руб. за каждый километр. Тогда общая стоимость: C(x)=50x+1000C(x) = 50x + 1000C(x)=50x+1000.

Что можно посчитать:

Сколько стоит перевезти груз на 120 км: C(120)=50·120+1000=7000 руб.

На какое расстояние хватит бюджета 3000 руб.: решаем 50x+1000=3000⇒x=40 км.

Если нужно перевезти на 200 км, а бюджет 5000 руб., хватит ли:

C(200) = 50·200+1000 = 11000 > 5000 — не хватит.

Зачем это в школе: линейные модели — база для задач на оптимизацию, бюджетирование, планирование смен, расчёт тарифов.

Пример 2. Квадратичная функция: траектория и оптимизация

Функция: $y = -x^2 + 4x - 3$. В физике это похоже на высоту тела, брошенного под углом: $h(t) = -5t^2 + v_0 t + h_0$.

Практика: мяч бросили вертикально вверх с начальной скоростью 20 м/с с высоты 2 м. Тогда $h(t) = -5t^2 + 20t + 2$.

Что можно найти:

- Время подъёма до максимальной высоты: вершина параболы при $t = -\frac{b}{2a} = -\frac{20}{2\cdot(-5)} = 2$ с.
- Максимальная высота: $h(2) = -5 \cdot 4 + 20 \cdot 2 + 2 = 22$ м.
- Когда мяч упадёт на землю: решаем $-5t^2 + 20t + 2 = 0$. Получаем $t \approx 4{,}1$ с (берём положительный корень).

Зачем это в школе: квадратные уравнения и параболы — основа кинематики, расчёта дальности полёта, задач на максимум/минимум (например, площадь при заданном периметре).

Пример 3. Корень: скорость падения и оптика

Функция: $y = \sqrt{x+2}$. В физике часто встречается формула скорости свободного падения: $v = \sqrt{2gh}$.

Практика: тело падает с высоты 45 м. Ускорение $g \approx 10\ \text{м/с}^2$. Тогда скорость перед ударом: $v = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 45} = \sqrt{900} = 30\ \text{м/с}$.

Что ещё можно: если известна скорость, найти высоту: $30 = \sqrt{20h} \Rightarrow 900 = 20h \Rightarrow h = 45\ \text{м}$.

Зачем это в школе: корни нужны в механике, оптике, расчётах скоростей и энергий.

Пример 4. Дробно-линейная функция: распределение ресурсов

Функция: $y = \frac{2x+1}{x-3}$. В экономике похожие зависимости возникают при расчёте средней стоимости или доли.

Практика: на производство партии товара уходит фиксированная стоимость 10 000 руб. и по 200 руб. на единицу. Средняя себестоимость: $C_{\text{ср}}(x) = \frac{10000+200x}{x} = 200 + \frac{10000}{x}$.

Что видно:

- При малом x средняя стоимость высокая (фиксированные затраты «тянут» вверх).
- При росте x она стремится к 200 руб. (горизонтальная асимптота).
- Вертикальной асимптоты здесь нет, но в других моделях (например, при делении на разность) они появляются.

Зачем это в школе: дробно-линейные модели помогают понять убывающую отдачу, экономию на масштабе, распределение фиксированных затрат.

Пример 5. Модуль: отклонения и допуски

Функция: $y = |x^2 - 4|$. В технике модуль часто означает отклонение от нормы.

Практика: деталь должна иметь длину 10 см, допустимое отклонение — не более 2 мм. Тогда условие: $|L - 10| \le 0{,}2$. Это эквивалентно $9{,}8 \le L \le 10{,}2$.

Ещё пример: если ошибка измерения описывается квадратичной зависимостью, модуль может показывать абсолютную величину ошибки без учёта знака.

Зачем это в школе: модуль — это про расстояния, погрешности, допуски, штрафы за отклонение, задачи оптимизации с ограничениями.

Домашнее задание.

Задача 1. Линейная функция (логистика)

Условие. Компания доставляет грузы. Стоимость доставки складывается из фиксированной платы за оформление 800 руб. и 120 руб. за каждый километр пути.

а) Составьте формулу зависимости стоимости C (в рублях) от расстояния x (в км).

б) Рассчитайте стоимость доставки на 35 км.

в) На какое максимальное расстояние можно доставить груз, если бюджет — 5000 руб.?

Задача 2. Квадратичная функция (кинематика)

Условие. Мяч бросили вертикально вверх с высоты 1,5 м со скоростью 18 м/с. Высота мяча над землёй (в метрах) описывается формулой $h(t) = -5t^2 + 18t + 1{,}5$, где t — время в секундах.

а) Найдите время подъёма до максимальной высоты.

б) Найдите максимальную высоту.

в) Через сколько секунд мяч упадёт на землю?

Задача 3. Функция квадратного корня (физика: скорость падения)

Условие. Скорость тела при свободном падении без начальной скорости определяется формулой $v = \sqrt{2gh}$, где $g \approx 10$ м/с^2, h — высота в метрах.

а) С какой скоростью упадёт тело, сброшенное с высоты 80 м?

б) С какой высоты нужно сбросить тело, чтобы скорость при ударе составила 25 м/с?

Задача 4. Дробно-линейная функция (экономика: средняя себестоимость)

Условие. На производство партии товара уходит фиксированная стоимость 60 000 руб. и по 300 руб. на каждую единицу. Средняя себестоимость одной единицы: $C_{\text{ср}}(x) = \frac{60000+300x}{x}$.

а) Вычислите среднюю себестоимость при выпуске 100, 500 и 1000 единиц.

б) К какому значению стремится средняя себестоимость при увеличении объёма производства? Объясните смысл этого значения.

Задача 5. Модуль (допуски и отклонения)

Условие. Длина детали должна быть 20 см, допустимое отклонение — не более 0,3 см.

а) Запишите условие в виде неравенства с модулем.

б) Решите неравенство и укажите допустимый диапазон длины детали.

в) Если измеренная длина 19,6 см, соответствует ли она требованиям?

Задача 6. Комбинированная (преобразования графиков + параметры)

Условие. Дана функция $f(x) = x^2$. Постройте график функции $y = |f(x-2) - 3|$.

а) Опишите последовательность преобразований.

б) Укажите координаты всех «ключевых» точек (вершины, нули, точки излома).

в) При каких значениях a уравнение $|f(x-2) - 3| = a$ имеет ровно три решения?